2122

UNIVERSITE DE PARIS XI

(CENTRE D'ORSAY)

NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSÉS

PAR

GÉRARD BESSI

Thèse de 3ème Cycle soutenue le 26 Juin 1976

Jury { Président : H. DELANGE
Examinateurs : G. POITOU
J.L. NICOLAS

UNIVERSITE DE PARIS XI

(CENTRE D'ORSAY)

NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSÉS

PAR

GÉRARD BESSI

Thèse de 3ème Cycle soutenue le 26 Juin 1976

Jury
- Président : H. DELANGE
- Examinateurs : G. POITOU
- J.L. NICOLAS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Ce travail se compose de trois parties :

1) La rédaction d'un exposé au Séminaire de Théorie des Nombres de BORDEAUX du 18 Avril 1975. Plusieurs points sont nettement améliorés dans les deux autres parties, mais il est intéressant de voir ce que donnent les différentes voies d'accès au problème : étude élémentaire, méthode des bénéfices, problème de programmation mathématique à coefficients entiers.

2) Un article écrit en commun avec J.L. NICOLAS, où nous donnons les principaux résultats que nous avons obtenus sur les nombres 2-hautement composés.

3) La troisième partie donne une autre caractérisation des nombres 2-hautement composés, avec application à des résolutions de problèmes d'optimisation, aux nombres 2-largement composés, et à l'approximation d'un problème d'optimisation à contrainte linéaire à coefficients réels par un autre à contrainte linéaire à coefficients entiers.

J'ai plaisir à remercier Messieurs les Professeurs DELANGE, POITOU et NICOLAS qui me font l'honneur de constituer le jury de thèse. Qu'il me soit permis d'exprimer tout particulièrement ma très vive reconnaissance à Mr. NICOLAS pour sa précieuse collaboration.

PREMIÈRE PARTIE

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1974-1975 - exposé n° 20

ÉTUDE DES NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSÉS

par

Gérard BESSI

-:-:-:-

§. 1. - Introduction

On dit qu'un nombre entier n est hautement composé si tout nombre m plus petit que n a moins de diviseurs que n. Si l'on définit $d(n)$ par le nombre de diviseurs de n, on sait que, si la décomposition en facteurs premiers de n est : $n = \prod_i p_i^{a_i}$ on a $d(n) = \prod_i (a_i + 1)$. La définition devient : n est hautement composé si et seulement si

$$m < n \Rightarrow d(m) < d(n) .$$

On voit que si $n = 2^{a_2} \dots p_r^{a_{p_r}}$ est un nombre hautement composé, on a :

$$a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{p_r} \quad (d(2^{a_2} \dots p_r^{a_{p_r}}) = d(2^{\sigma(a_2)} \dots p_r^{\sigma(a_{p_r})})$$

où σ est une permutation de $\{a_2, \dots, a_{p_r}\}$).

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548109_0015

Ramanujan [1] a défini et étudié les nombres hautement composés démontrant qu'à l'exception de $A=4$ et $A=36$ on a $a_{p_r}=1$ ([1], §.8).

On restreint maintenant la définition des nombres hautement composés à $\mathcal{N}_2 = \{n\in\mathbb{N} \ , \ n=2^a 3^b\}$.

DÉFINITION. - On dit qu'un nombre $n\in\mathcal{N}_2$ est 2-hautement composé si $\forall m\in\mathcal{N}_2 \ , \ m<n \Rightarrow d(m)<d(n)$.

Remarque : La partie tronquée d'un nombre hautement composé est 2-hautement composé ($N=2^{a_2}\dots p_r^{a_{p_r}}$ hautement composé, $\forall m = 2^{b_2}3^{b_3} < 2^{a_2}3^{a_3} = n$, on a $\pi = 2^{b_2}3^{b_3}5^{a_5}\dots p_r^{a_{p_r}} < N$ donc $d(M)<d(N)$ ce qui entraîne $d(m)<d(n)$.

La réciproque est fausse : $2^2 3 5^3$ non hautement composé (voir la table [1] p. 87) mais $2^3 3$ est 2-hautement composé (voir exemple II, b, 4).

PROBLÈME. - Etude des nombres 2-hautement composés et plus particulièrement de $q(x) = \text{card}\{n \text{ 2 h. c } n\le x\}$; comme on a

$$\text{card}\{n\in\mathcal{N}_2 \quad n\le x\} \le c(\log x)^2 \ ,$$

on a donc :

$$q(x) \le c(\log x)^2$$

Notre problème sera donc d'obtenir une majoration plus fine, pour cela nous utiliserons les nombres 2-hautement composés supérieurs restriction à $\mathcal{N}_2$ des nombres hautement composés supérieurs que Ramanujan a défini ([1], §.32) dont nous donnerons la définition et les propriétés plus loin, et l'on aura : $\text{card}\{n \text{ 2-h. c. s. } n\le x\} \le c_1 \log x$.

Nous étudierons alors les nombres 2-hautement composés compris entre deux nombres 2-hautement composés supérieurs, et pour cela nous utiliserons la méthode des bénéfices introduite par J.-L. Nicolas ([2], §.3) pour la répartition des nombres hautement composés de Ramanujan.

A ce problème peut être aussi associé un problème de programmation mathématique ; en effet, si $m \in \mathcal{N}_2$ on a $\log m = a \log 2 + b \log 3$ et $d(m) = (a+1)(b+1)$.

Les nombres 2-hautement composés sont les solutions des problèmes de programmation

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases} .$$

Dans une dernière partie nous étudierons les problèmes de la forme

$$\begin{cases} p_r x + q_r y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$$ ou $\frac{p_r}{q_r}$ est un convergent dans le développement en fraction continue de $\theta = \frac{\log 2}{\log 3}$

§. 2. - Étude des nombres 2-hautement composés et 2-hautement composés supérieurs

a) Etude élémentaire

On considère le développement en fractions continues de $\theta^{-1} = \frac{1}{\theta} = \frac{\log 3}{\log 2}$ comme $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \theta^{-1} \Rightarrow \frac{2^{p_{2n}}}{3^{q_{2n}}} < 1$, $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \theta^{-1} \Rightarrow \frac{2^{p_{2n+1}}}{3^{q_{2n+1}}} > 1$, donc en écrivant que pour n 2-hautement composés on a :

$$d\left(\frac{2^{p_{2n}}}{3^{q_{2n}}} n\right) < d(n) \quad , \quad d\left(\frac{3^{q_{2n+1}}}{2^{p_{2n+1}}} n\right) < d(n)$$

on obtient comme conditions nécessaires avec $n = 2^a 3^b$:

$$q_{2n+2}\, p_{2n+1}\, q_{2n}^{-1} \leq b \leq q_{2n+3}\, p_{2n+2}\, q_{2n+1}^{-1}$$

alors

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}(b+1) - p_{2n+2}^{-1} < a < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}(b+1) + p_{2n+1}^{-1}$$

$$q_{2n+3}\, p_{2n+2}\, q_{2n+1}^{-1} \leq b \leq q_{2n+4}\, p_{2n+3}\, q_{2n+2}^{-1}$$

alors

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}(b+1) - p_{2n+2}^{-1} < a < \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}}(b+1) + p_{2n+3}^{-1} \ .$$

Conditions suffisantes $\quad \theta^{-1} b - 1 \leq a \leq \theta^{-1}(b+2) - 1$

Pour $a < \theta^{-1} b - 1$, si $\forall m$ tel que $b - m > \theta(a+1) - 1$, on a :

$$\frac{[m\,\theta^{-1}]}{m}(b+1) - [m\,\theta^{-1}] < a+1$$

alors $2^a 3^b$ sera 2-hautement composé.

Pour $a > \theta^{-1}(b+2) - 1$, si $\forall m$ tel que $b+m < (a+1)\theta - 1$, on a .

$$\frac{[m\,\theta^{-1}]}{m}(b+1) + [m\,\theta^{-1}] + 1 > a+1 \ ,$$

alors $2^a 3^b$ sera 2-hautement composé.

b) Étude des nombres 2-hautement composés supérieurs

De même que Ramanujan [1] a introduit les nombres hautement composés supérieurs, on peut définir :

DÉFINITION. - $N \in \mathcal{N}_2$ est 2-hautement composé supérieur si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall M \in \mathcal{N}_2$, $\dfrac{d(M)}{M^\varepsilon} \leq \dfrac{d(N)}{N^\varepsilon}$.

PROPRIÉTÉS 1) $\forall \varepsilon > 0$ il existe au moins un nombre 2-hautement composé supérieur associé à ε.

En effet, $d(N) = 2^{\frac{\log N}{\log\log N} + 0(\frac{\log N}{\log\log N})}$ Ramanujan [1], donc $\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in\mathcal{N}_2}} \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}} = 0$, donc la fonction $\frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$ a un maximum absolu dans $\mathcal{N}_2$ qu'elle atteint en un ou plusieurs points de $\mathcal{N}_2$.

2) Tout nombre 2-hautement composé supérieur est 2-hautement composé.

En effet, N 2-hautement composé supérieur $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $d(M) \leq (\frac{M}{N})^{\varepsilon} d(N)$ or $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ N est 2-hautement composé.

3) $\forall \varepsilon > 0$ les nombres 2-hautement composés supérieurs associés à ε sont de la forme $2^{a_\varepsilon} 3^{b_\varepsilon}$ avec :

$$\log(a_\varepsilon - 2) - \log(a_\varepsilon - 1) \leq \varepsilon \log 2 \leq \log(a_\varepsilon + 1) - \log a_\varepsilon$$

$$\log(b_\varepsilon + 2) - \log(b_\varepsilon + 1) \leq \varepsilon \log 3 \leq \log(b_\varepsilon + 1) - \log b_\varepsilon .$$

En effet, il suffit d'écrire

$$\frac{d(2N_\varepsilon)}{(2N_\varepsilon)^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$\frac{d(\frac{N_\varepsilon}{2})}{(\frac{N_\varepsilon}{2})^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$\frac{d(3N_\varepsilon)}{(3N_\varepsilon)^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$\frac{d(\frac{N_\varepsilon}{3})}{(\frac{N_\varepsilon}{3})^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

4) Si ε tel que :

$$\log(a_{\varepsilon+2})-\log(a_{\varepsilon+1}) < \varepsilon \log 2 < \log (a_{\varepsilon+1})- \log a_{\varepsilon}$$

$$\log(b_{\varepsilon+2})-\log(b_{\varepsilon+1}) < \varepsilon \log 3 < \log (b_{\varepsilon+1})- \log b_{\varepsilon}$$

il existe un nombre 2-hautement composé supérieur associé à ε et celui-ci est unique.

En effet, les conditions entraînent que $a_{\varepsilon} = [\frac{1}{2^{\varepsilon}-1}]$ et $b_{\varepsilon} = [\frac{1}{3^{\varepsilon}-1}]$ et Ramanujan ([1], §.32) $N_{\varepsilon} = 2^{a_{\varepsilon}} 3^{b_{\varepsilon}}$ est 2-hautement composé supérieur.

Remarque : Si l'on pose $F(p,n) = \frac{\log(n+1)-\log n}{\log p}$ d'après 3 et 4, si l'on pose :

$$E_2 = \{ F(2,n) \quad n \geq 1 \}$$

$$E_3 = \{F(3,n) \quad n \geq 1 \} \qquad \text{et} \quad E = E_2 \cup E_3$$

en rangeant les valeurs de E qu'on peut noter ε_i, on aura :

$\forall \varepsilon \in]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$ $\quad N_{\varepsilon}$ est constant et l'on posera par déf. N_i

$\varepsilon = \varepsilon_i$ $\quad N_{\varepsilon}$ est $N_i, 2N_i$ ou $3N_i$

et N_{i+1} est $2N_i$ ou $3N_i$ et les nombres 2-hautement composés supérieurs sont les N_i.

Exemple : $E_2 = \{ 1 ; 0,585 ; 0,415 ; 0,322 ; 0,263 \ldots \}$

$E_3 = \{0,631 ; 0,369 ; 0,262 ; 0,203 ; 0,166, \ldots \}$

$N_1 = 1 \quad N_3 = 2\,3 \quad N_5 = 2^3.3 \quad N_7 = 2^4 3^2 \quad N_9 = 2^5 3^3$

$N_2 = 2 \quad N_4 = 2^2 3 \quad N_6 = 2^3.3^2 \quad N_8 = 2^5 3^2$.

5) Pour qu'un nombre $N = 2^a 3^b$ soit 2-hautement composé supérieur il faut et il suffit que :

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{b})^{\theta}-1} - 1 \leq a \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{b+1})^{\theta}-1}$$

d'après le 3) et 4).

6) En utilisant les inégalités : $\frac{U-1}{U} \leq \log U \leq U-1$, on a :

$$N_\varepsilon = 2^{a_\varepsilon} 3^{b_\varepsilon} \text{ est 2-h. c. s.} \Rightarrow \theta^{-1} b_\varepsilon - 2 \leq a_\varepsilon \leq \theta^{-1}(b_\varepsilon + 2) .$$

Conclusion. - Ces résultats vont nous permettre de majorer

$\tilde{q}_s(X) = \text{card}\{N_\varepsilon \text{ 2-h. c. s. } N_\varepsilon \leq X\}$.

En effet, $N_\varepsilon \leq X \Rightarrow a_\varepsilon \log 2 + b_\varepsilon \log 3 \leq \log X$, comme

$$b_\varepsilon = \theta^{-1} a_\varepsilon + 0(1) \Rightarrow a_\varepsilon \leq c_1 \log X .$$

Donc il y a au plus $c_1 \log X$ choix possibles de a_ε et à chacun de ces choix ne correspond qu'un nombre fini de choix de b_ε

$$\tilde{q}_s(X) \leq c_1 \log X$$

5) - $q(X) \leq c(\log X)^{3/2}$

On a $\tilde{q}_s(X) \leq c_1 \log X$, il nous faut maintenant étudier les nombres 2-hautement composés compris entre deux nombres 2-hautement composés supérieurs, pour cela, comme pour les nombres hautement composés, on utilisera la méthode des bénéfices (J.-L. Nicolas [2])

a) Bénéfices

Un nombre 2-hautement composé supérieur est un maximum sur l'ensemble $\mathcal{N}_2$ pour la fonction $\frac{d(n)}{n^\varepsilon}$; donc pour la fonction $\log d(n) - \varepsilon \log n$.

On définit $\text{bén.}_{N_\varepsilon}(n) = \log d(N_\varepsilon) - \varepsilon \log N_\varepsilon - \log d(n) + \varepsilon \log n$.

THÉORÈME. - Soit n un nombre 2-hautement composé. Soit N_ε le nombre hautement composé supérieur précédent n, on a :

$$\text{bén.}_{N_\varepsilon} n \leq \varepsilon \log 3 .$$

Démonstration. - Soit N' le nombre 2-hautement composé supérieur suivant N_ε ; on a donc $N' \leq 3N_\varepsilon$, donc on a : $N_\varepsilon \leq n \leq N' \leq 3N_\varepsilon$ ($n \leq N'$ car sinon le 2-hautement composé supérieur précédent n serait N'). Or :

$$n \text{ 2-h. c.} \Rightarrow d(n) \geq d(N_\varepsilon)$$

$$N' \text{ 2-h. c. s. donc 2-h. c.} \Rightarrow d(N') \geq d(n) ,$$

donc $d(N_\varepsilon) \leq d(n) \leq d(N')$, n 2-h. c. en appliquant la proposition 2 (J.-L. Nicolas [2] p. 5), on a :

$$\text{bén.}_{N_\varepsilon} n \leq \text{bén.}_{N_\varepsilon} N' + \log \frac{d(N')}{d(N_\varepsilon)}$$

$$= \log \frac{d(N_\varepsilon)}{d(N')} + \varepsilon \log \frac{N'}{N_\varepsilon} + \log \frac{d(N')}{d(N_\varepsilon)} = \varepsilon \log \frac{N'}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon \log 3$$

donc $\text{bén.}_{N_\varepsilon} n \leq \varepsilon \log 3$

b) Application

En appliquant ce théorème on va trouver des conditions nécessaires pour les nombres 2-hautement composés supérieurs à N_ε .

Soit $n = 2^a 3^b$, comme $\text{bén.}_{N_\varepsilon} n = \underset{\geq 0}{G(a, a_\varepsilon, 2)} + \underset{(a_\varepsilon+1) \geq 0}{G(b, b_\varepsilon, 3)}$,

on aura comme condition nécessaire $\varepsilon(a-a_\varepsilon) \log 2 + \log \frac{a_\varepsilon+1}{a+1} \leq \varepsilon \log 3$

en posant $h = a - a_\varepsilon$.

1) $h \geq 0$, $\varepsilon h \log 2 - \log\left(1+\frac{h}{a_\varepsilon+1}\right) \leq \varepsilon \log 3$

or $\log\left(1+\frac{1}{a_\varepsilon+1}\right) \leq \varepsilon \log 2$ et $\varepsilon \log 3 \leq \theta^{-1} \varepsilon \log 2 \leq \theta^{-1} \log\left(1+\frac{1}{a_\varepsilon}\right) \leq \frac{\theta^{-1}}{a_\varepsilon}$

(car condition 3 de $2^{a_\varepsilon} 3^{b_\varepsilon}$ 2-hautement composé supérieur). Donc h doit vérifier

$$h \log\left(1+\frac{1}{a_\varepsilon+1}\right) - \log\left(1+\frac{h}{a_\varepsilon+1}\right) \leq \frac{\theta^{-1}}{a_\varepsilon}$$

comme on peut voir que $h < a_\varepsilon+1$. en posant $F(x) = x \log\left(1+\frac{1}{a_\varepsilon+1}\right) - \log\left(1+\frac{x}{a_\varepsilon+1}\right)$ et en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2

h doit vérifier $\frac{h^2}{8(a_\varepsilon+1)^2} - \frac{h}{(a_\varepsilon+1)^2} \leq \frac{\theta^{-1}}{a_\varepsilon}$

$$h \leq 4 + 2\sqrt{4 + 2\theta^{-1}\left(\frac{a_\varepsilon+1}{a_\varepsilon}\right)^2} \Rightarrow h \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\theta^{-1}}\sqrt{a_\varepsilon} + c \ .$$

2) $h \leq 0$ par le même raisonnement en posant $h' = -h$ on a :

$$h' \leq \sqrt{2\lambda a_\varepsilon} + c \ .$$

Donc $a - a_\varepsilon = 0(\sqrt{a_\varepsilon})$.

c) $q(X) \leq c(\log X)^{3/2}$

Pour X donné, on note $N_1, \ldots, N_h$ les nombres 2-hautement composés supérieurs $\leq X$, on sait que $N_{i+1} \leq 3N_i$ et $h \leq c_1 \log X$,

$$q(X) \leq q(N_{h+1}) = \sum_{i=1}^{h} (q(N_{i+1}) - q(N_i)) + q(N_1)$$

or $q(N_{i+1}) - q(N_i) = \text{card}\{ n \text{ 2-hautement composé tel que } N_i \leq n < N_{i+1}\}$

or $N_{i+1} \leq 3N_i \Rightarrow q(N_{i+1}) - q(N_i) \leq \text{card}\{n \text{ 2-hautement composé tel que } N_i \leq n < 3N_i\}$

n est de la forme $2^a 3^b$ donc pour un a choisi il ne correspond qu'un seul h tel que $N^i \leq 2^a 3^b < 3N_i$, or comme $a - a_\varepsilon = 0(\sqrt{a_\varepsilon})$ donc il y a $0(\sqrt{a_\varepsilon})$ choix possibles de a et donc de n , or $a_\varepsilon \log 2 + b_\varepsilon \log 3 = \log N_i$ et

$a_\varepsilon = \theta^{-1} b_\varepsilon + 0(1) \Rightarrow 0(\sqrt{a_\varepsilon}) = 0(\sqrt{\log N_i}) = 0(\sqrt{\log X})$

$q(X) \leq h\, c_2 \sqrt{\log X} \leq c(\log X)^{3/2}$.

§. 4. - Existence et majoration de i_o et i'_o

On cherche toujours à majorer $\text{card}\{n \text{ 2-h. c. } ; N_\varepsilon \le n < N'_\varepsilon\}$ et comme $N' \le 3N_\varepsilon$, il faut donc majorer $\text{card}\{n \text{ 2-h. c. } ; N_\varepsilon \le n < 3N_\varepsilon\}$. On explicite les nombres $2^a 3^b$ compris entre N_ε et $3N_\varepsilon$, pour cela on peut écrire $2^a 3^b = 2^i 3^{-h} N_\varepsilon$ et la condition $N_\varepsilon \le n < 3N_\varepsilon$ entraîne que pour un i fixé, h_i existe et est déterminé d'une manière unique $h_i = [i \frac{\log 2}{\log 3}] = [i\theta]$, on peut donc ordonner en i ces nombres et les noter $M_i = 2^i 3^{-h_i} N_\varepsilon$.

On a :

$$\{n = 2^a 3^b \text{ tel que } N_\varepsilon \le n < 3N_\varepsilon\} = \{M_i \mid -a_\varepsilon \le i < [\theta^{-1} b_\varepsilon + \theta^{-1}]\}.$$

PROPRIÉTÉ DES M_i. - En utilisant les propriétés 3 des nombres 2-hautement composés supérieurs on a :

$$\text{bén. } M_i = \varepsilon i \log 2 - \log \frac{a_\varepsilon + i + 1}{a_\varepsilon + 1} - \varepsilon h_i \log 3 - \log \frac{b_\varepsilon - h_i + 1}{b_\varepsilon + 1}$$

et on voit que :

- (bén. M_i) est croissant pour $i \ge 0$
- (bén. M_i) est décroissant pour $i \le 0$
- bén. $M_o = 0$.

Remarque : $\forall i$ tel que bén. $M_i \ge \varepsilon \log 3$

$\forall -i'$ tel que bén. $M_{-i} \ge \varepsilon \log 3$

alors M_i et $M_{-i'}$ ne sont pas 2-hautement composés, donc si j_1 est le premier i, de même $-j'_1$ pour $-i'$ alors $\text{card}\{n \text{ 2-h. c. } N_\varepsilon \le n < N'\} \le j_1 + j'_1$ mais ceci nous donnera si l'on évalue j_1 et j'_1 le même résultat qu'au §. 3. cependant on sait que les nombres 2-hautement composés compris entre N_ε et $3N_\varepsilon$ sont à prendre parmi les M_i , $-j'_1 \le i \le j_1$

De plus on peut voir sur des exemples que si un M_i est barré par M_j (i.e. on a $M_j < M_i$ et $d(M_j) \geq d(M_i)$) donc M_i non 2-hautement composé, alors tous les nombres d'indice supérieur (en valeur absolu) sont barrés.

On va prouver qu'ils existent i_o et $i'_o \geq 0$ tels que

(1) $\forall -i'_o \leq i \leq i_o$ M_i est 2-hautement composé

(2) $\forall\, i > i_o$ M_i est barré

(2') $\forall i < -i'_o$ M_i est barré

(3) $M_{i_{o+1}}$ est barré par $\underset{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{i_{o+1}}}}{\text{Max}} M_j$

(3') $M_{-i'_{o-1}}$ est barré par $\underset{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{-(i'_{o+1})}}}{\text{Max}} M_j$.

DÉFINITION et CONDITION 1.

LEMME 1. - M_j barre $M_i \Rightarrow$ bén. $M_j <$ bén. M_i .

Démonstration. - On a bén. $M_i = g(i) + f(i)$ avec :

$$g(i) = \varepsilon \log M_i - \varepsilon \log N_\varepsilon$$

$$f(i) = \log d(N_\varepsilon) - \log d(M_i)$$

M_j barre $M_i \Rightarrow M_j < M_i$ et $d(M_j) \geq d(M_i) \Rightarrow g(j) < g(i)$ et $f(j) \leq f(i)$

$\Rightarrow$ bén. $M_j <$ bén. M_i .

Donc pour voir si un M_i est barré il suffit de regarder si les nombres de bénéfice plus petit le barrent.

DÉFINITION. - On pose i_o+1 le premier indice $i \geq 0$ tel que M_i soit barré

$-i'_o-1$ le premier indice $i \leq 0$ tel que M_i soit barré.

Alors par définition i_o et i'_o vérifient la condition 1 .

CONDITION 2.

LEMME 0. - M_{-1} ne peut être barré que par N_ε ou par M_2 , mais $d(M_2) \leq d(M_{-1})$.

Démonstration. - D'après le lemme 1, M_{-1} ne peut être barré par des M_i avec $i<0$, il faut donc étudier les M_i avec $i \geq 0$. Or pour que M_i barre M_{-1} il est nécessaire que $M_i < M_{-1} \Rightarrow \frac{2^i}{3^{h_i}} < \frac{3}{2} \Rightarrow i+1 < \theta^{-1}(h_i+1)$, or :

$$d(M_i) = (a+i+1)(b-h_i+1) = ab + (i+1)b - (h_i-1)a - (i+1)(h_i-1)$$

or :

$$i+1 < \theta^{-1}(h_i+1)$$

$$\Rightarrow d(M_i) < ab + \theta^{-1}b(h_i+1) - (h_i-1)a - (i+1)(h_i-1)$$

or N_ε est 2-hautement composé supérieur $\Rightarrow \theta^{-1}b - a \leq 2$

$$\Rightarrow d(M_i) < ab + 2(h_i+1) + 2a - (i+1)(h_i-1)$$

$$\Rightarrow d(M_i) < a(b+2) + 2(h_i+1) - (i+1)(h_i-1)$$

$$\Rightarrow d(M_i) < d(M_{-1}) + 2(h_i+1) - (i+1)(h_i-1)$$

or pour $i \geq 5$, $h_i \geq 2$ $\quad (i+1)(h_i-1) \geq 6(h_i-1) \geq 2(h_i+1) + 4h_i - 8 \geq 2(h_i+1)$

$\Rightarrow d(M_i) < d(M_{-1})$ pour $i \geq 5$.

Donc il reste à voir $0 \leq i \leq 4$ or pour $i \neq 0$ et $i \neq 2$, $M_i > M_{-1}$, donc M_{-1} ne peut être barré que par N_ε ou par M_2 .

Cas M_2 $\quad d(M_2) = (a+3)b$, $d(M_{-1}) = a(b+2)$

or $\theta^{-1} b \leq a+2$ et $\theta^{-1} \# 1,584$

$\Rightarrow \frac{3}{2} b + 0,08 \leq a+2 \Rightarrow \frac{3}{2} b \leq a$ pour $b \geq 13 \Rightarrow d(M_{-1}) \geq d(M_2)$

pour $b \leq 12$ on peut le vérifier sur la table des nombres 2-hautement composés supérieurs.

Exemple : $N_\varepsilon = 2^3 3^2$ $\quad d(M_2) = d(2^5 3) = 12$ $\quad d(M_{-1}) = d(2^2 3^3) = 12$

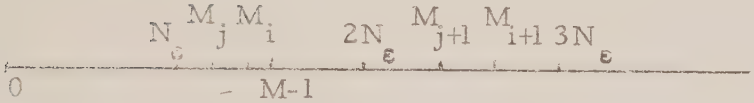
donc M_2 barre M_{-1} .

LEMME 2. - Soit $i \geq 0$ $\quad M_i$ barré $\Rightarrow$ M_{i+1} barré.

Démonstration. - On va comparer M_i à M_{-1} .

1°) $M_i < M_{-1}$: Soit M_j barrant M_i

$$M_i < M_{-1} = \frac{3}{2} N_\varepsilon \Rightarrow M_{i+1} = 2\pi i$$



or M_i barré par $M_j \Rightarrow M_{j+1} < M_i$

$\Rightarrow 2M_j < 2M_i < 3N_\varepsilon \Rightarrow M_{j+1} = 2M_j$

$$d(M_{j+1}) = (a+j+2)(b-h_{j+1})$$
$$d(M_{i+1}) = (a+i+2)(b-h_{i+1}) \quad \Rightarrow \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} = \frac{(a+j+2)(b-h_{j+1})}{(a+i+2)(b-h_{i+1})}$$

si on pose $\quad c_j = a+j+2$

$\quad d_j = b-h_{j+1}$ $\quad$ on a $\quad \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} = \frac{(c_{j+1})\, d_j}{(c_{i+1})\, d_i}$

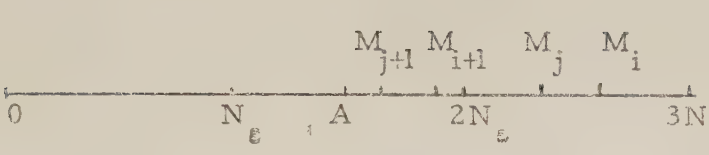
or M_j barre $M_i \Rightarrow c_j d_j \geq c_i d_i$ $\quad (1)$

de plus, d'après le lemme 1, on a bén. $M_j <$ bén. M_i , or croissance de (bén. M_i) pour $i \geq 0 \Rightarrow j < i \Rightarrow h_j < h_i \Rightarrow d_j > d_i$ $\quad (2)$.

(1) et (2) $\Rightarrow \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} \geq 1 \Rightarrow M_{i+1}$ est barré par M_{j+1} .

2°) $M_i \geq M_{-1}$

a) $M_j \geq M_{-1}$



on a donc $M_{i+1} = \frac{2}{3} M_i$

$M_{j+1} = \frac{2}{3} M_j$

et donc $M_{j+1} < M_{i+1}$, de plus :

$$\frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} = \frac{(a+j+2)(b-h_j)}{(a+i+2)(b-h_i)} = \frac{(c_{j+1})(d_{j-1})}{(c_{i+1})(d_{i-1})}$$

or M_j barre $M_i \Rightarrow j < i$ or $j < i \Rightarrow -c_j > -c_i$

$c_j d_j \geq c_i d_i$ et $d_j > d_i$

$$\Rightarrow \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} \geq 1 \Rightarrow M_{j+1} \text{ barre } M_{i+1} .$$

b) $M_j < M_{-1}$

Si $M_j = N_\varepsilon$, N_ε barre $M_i \Rightarrow d(N_\varepsilon) \geq d(M_j)$, or

bén. $M_{i+1} >$ bén. M_i

$g(i+1) < g(i)$

$\Rightarrow d(M_{i+1}) \leq d(M_i) \leq d(N_\varepsilon)$

donc N_ε barre M_{i+1}

Si $M_j \neq N_\varepsilon$, $M_j < M_{-1}$ d'après le lemme 0 on a $d(M_j) \leq d(M_{-1})$

or M_j barre $M_i \Rightarrow M_{-1}$ barre $M_i \Rightarrow c-1\ d-1 \geq c_i d_i$, or :

$$\frac{d(N_\varepsilon)}{d(M_{i+1})} = \frac{c_o d_o}{(c_{i+1})(d_{i-1})} = \frac{(c_{-1}+1)(d_{-1}-1)}{(c_i+1)(d_i-1)}$$

or $c_{-1} < c_i$

et $d_{-1} > d_i$ $\Rightarrow \frac{d(N_\varepsilon)}{d(M_{i+1})} \geq 1 \Rightarrow N_\varepsilon$ barre M_{i+1} .

LEMME 2'. - Soit $-i \leq 0$, M_{-i} barré $\Rightarrow$ M_{-i-1} barré.

Démonstration. - On compare M_{-i} à M_1 les deux premiers cas sont similaires au lemme 2 pour le troisième il faut démontrer le lemme 0' .

LEMME 0'. - Pour $i>0$ tel que $M_{-i} < M_1$ alors $d(M_{-i}) \leq d(M_1)$.

La condition $M_{-i} < M_1 \Rightarrow \theta^{-1}(h_i+1) < i+1$ et

$d(M_{-i}) = (a-i+1)(b+h_i+2) < ab+2b+a+2+2(i+1)+(h_i+1)(-i+1)-2$

donc : $d(M_{-i}) < d(M_1)$ pour $i>4$

donc les seuls cas possibles sont M_{-1} et M_{-3} , or $d(M_{-1}) = d(\frac{3}{2} N_\varepsilon) = ab+2a$

et $d(M_{-3}) = d(\frac{9}{8} N_\varepsilon) = (a-2)(b+3)$ donc :

$$d(M_1)-d(M_{-1}) = 2b-a+2 \qquad d(M_1)-d(M_{-3}) = 2(2b-a+4)$$

or $a \leq \theta^{-1}(b+2) \leq (1,6)(b+2) = 2b+2+(1,2)-(0,4)b \leq 2b+2$ pour $b \geq 3$ et $d(M_1) \geq d(M_{-3})$.

Donc en appliquant successivement les lemmes 2 et 2' à partir de i_{o+1} et de $-i'_{o-1}$ on obtient la condition 2.

CONDITION 3.

LEMME 3. - $M_{i_{o+1}}$ est barré par $\max_{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{i_{o+1}}}} M_j$.

Démonstration. - Soit $M_{j_o} = \max_{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{i_{o+1}}}}$ et M_j le nombre qui barre M_i . On a

$M_j \leq M_{j_o} < M_{i_{o+1}}$ si $M_j = M_{i_o}$ problème résolu, donc on peut supposer

$M_j < M_{j_o} < M_{i_{o+1}}$ or $-i'_o \leq j_o \leq i_o$ donc M_{j_o} ne peut être barré par définition de i_o donc en particulier M_j ne barre par M_{j_o} or

$M_j < M_{j_o} \Rightarrow d(M_{j_o}) > d(M_j) \geq d(M_{i_{o+1}}) \Rightarrow M_{j_o}$ barre $M_{i_{o+1}}$.

Par une démonstration identique on obtient :

LEMME 3'. - $M_{-i'_o-1}$ est barré par $\max_{\substack{-i'_o \le j \le i_o \\ M_j < M_{-i'_o-1}}} M_j$.

Les lemmes 3 et 3' donnent la condition 3.

Conclusion : On a donc démontré l'existence de i_o et i'_o, pour un nombre 2-h-c supérieur mais la démonstration se généralise pour un nombre 2-h-c quelconque, maintenant nous allons essayer en se servant des 3 propriétés de i_o et i'_o d'obtenir une majoration de $i_o + i'_o$.

Pour cela on va essayer de ranger les nombres M_i dans l'ordre croissant des valeurs de M_i donc des valeurs de $g(i)$ et donc des valeurs de $i \frac{\log 2}{\log 3} - h_i = \{i\theta\}$.

On utilisera le théorème suivant pour ranger les $\{i\theta\}$ avec $-i'_o \le i \le i_o$ et θ un nombre irrationnel. On range les nombres $\{n\theta\}$ avec $N_1 \le n \le N_2$ N_1, $N_2 \in \mathbb{Z}$ en une suite ordonnée

$$0 \le \{n_o\theta\}, \{n_1\theta\}, \ldots, \{n_N\theta\} < 1 \qquad N = N_2 - N_1$$

Soit q_h le dénominateur du convergent principal de θ immédiatement $\le N$, soit $r = \left[\frac{N - q_{h-1}}{q_h}\right]$ et $A = N - q_{h-1} - r\,q_h$ (on a donc $0 \le A \le q_{h-1}$) alors la famille

$$\begin{cases} \delta_i = n_{i+1} - n_i \\ \delta_N = n_o - n_N \end{cases}$$

défini pour $0 \le i \le N-1$ prend au plus 3 valeurs

1) $\delta_i = (-1)^h q_h$ lorsque $N_1 \le n_i + (-1)^h q_h \le N_2$

2) $\delta_i = (-1)^{h-1}(r\,q_h + q_{h-1})$ sinon et si $N_1 \le n_i + (-1)^{h-1}(r\,q_h + q_{h-1}) \le N_2$

3) $\delta_i = (-1)^{h-1}((r-1)q_h + q_{h-1})$ sinon.

Donc en introduisant $M_{i_{o+1}}$ et en écrivant qu'il est barré par celui qui le précède et de même pour $M_{-i'_{o-1}}$ on essayera d'obtenir une majoration de $i_o + i'_o$ en fonction de a_ε ce qui donnera

$$q(X) \leq c(\log X)^{1+K}$$

et l'on pense que

$$\frac{1}{3} < K < \frac{1}{2} \quad .$$

§. 5. - Problèmes de programmation mathématiques à coefficients entiers

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases} \qquad a_1 \text{ et } a_2 \text{ entiers.}$$

a) Introduction

On a le problème de programmation $\begin{matrix} x \log 2 + y \log 3 \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{matrix}$

et l'on cherche à voir le rapport entre ce problème et les problèmes de la forme

$$\begin{cases} p_h x + q_h y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$$

où $\frac{p_h}{q_h}$ est un convergent dans le développement en fraction continue de $\theta = \frac{\log 2}{\log 3}$.

b) Résultats généraux

1) $$(I)\begin{cases} a_1 x + a_2 y = c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases} .$$

La solution réelle de (I) est $y^* = \frac{c + a_1 - a_2}{2a_2}$ $x^* = \frac{c + a_2 - a_1}{2a_1}$.

2) Si (x, y) est la solution entière du problème I, alors :

$$|x-x^*| \leq \frac{a_2}{2} \quad , \quad |y-y^*| \leq \frac{a_1}{2} \quad .$$

Démonstration. - Si l'on pose $X = x-x^*$, $Y = y-y^*$, le problème I devient :

$$\begin{cases} a_1 X + a_2 Y \\ \max \left(\frac{c+a_1+a_2}{2a_1} + X\right) \quad \left(Y + \frac{c+a_1+a_2}{2a_2}\right) \end{cases}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} X + x^* \in \mathbb{Z} \\ Y + y^* \in \mathbb{Z} \\ a_1 X + a_2 Y = 0 \\ |X| \text{ minimum.} \end{cases}$$

Soit (X_o , Y_o) tel que $X_o + x^* \in \mathbb{Z}$, $Y_o + y^* \in \mathbb{Z}$ et $a_1 X_o + a_2 Y_o = 0$.

Alors $\exists h$ tel que $h\, a_2 \leq X_o < (h+1)\, a_2$.

Donc $0 \leq X_o - h\, a_2 < a_2$. Deux cas sont possibles

a) $X_o - h\, a_2 < \frac{a_2}{2}$, donc $|X_o - h\, a_2| < \frac{a_2}{2}$;

b) $X_o - h\, a_2 \geq \frac{a_2}{2}$, donc $0 > X_o - (h+1)\, a_2 \geq -\frac{a_2}{2}$;

donc $|X_o - (h+1)\, a_2| \leq \frac{a_2}{2}$.

Donc la solution (X_1, Y_1) du problème est telle que $|X_1| \leq \frac{a_2}{2}$ et donc $|Y_1| = |-\frac{a_1 X}{a_2}| \leq \frac{a_1}{2}$.

Donc la solution (x_1, y_1) est telle que $|x_1 - x^*| \leq \frac{a_2}{2}$ et $|y_1 - y^*| \leq \frac{a_2}{2}$.

Pour $c > \frac{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 - 2a_2 + 1}{2}$ alors la résolution du

problème II $\begin{cases} a_1 x + a_2 y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$ revient à la solution du

problème I $\begin{cases} a_1 x + a_2 y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$.

Démonstration. - Il suffit de prouver que pour $c > \frac{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 - 2a_2 + 1}{2}$

si (x', y') solution de I avec $c-1$ et (x, y) solution de I avec c, alors

$(x'+1)(y'+1) < (x+1)(y+1)$.

Or (x', y') solution de I avec $c-1 \Rightarrow (x'+1)(y'+1) \leq (x'^*+1)(y'^*+1) - \frac{(c-1+a_1+a_2)^2}{4a_1 a_2}$

(x, y) solution de c si $X = x - x^*$ on a :

$$(x+1)(y+1) = -\frac{a_1}{a_2} X^2 + \frac{(c+a_1+a_2)^2}{4a_1 a_2}$$

or 2) donne $|X| \leq \frac{a_2}{2} \Rightarrow (x+1)(y+1) \geq -\frac{a_1 a_2}{4} + \frac{(c+a_1+a_2)^2}{4a_1 a_2}$

donc pour $c > \frac{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 - 2a_2 + 1}{2} \Rightarrow (x+1)(y+1) > (x'+1)(y'+1)$.

c) Résolution de

$$I \quad \begin{cases} p_{2n}x + q_{2n}y = c \\ \max (x+1)(y+1) \ . \end{cases}$$

Si l'on prend $c_m = 2m\, p_{2n}q_{2n} - p_{2n} - q_{2n}$ la solution pour c_m sera $x_o^m = m\, q_{2n} - 1$, $y_o^m = m\, p_{2n} - 1$, on appellera c_m une borne très supérieure.

On connaît la solution de I pour c_m , de même pour $c_{m+1} = c_m + 2a_1a_2$

On va essayer d'étudier le problème pour $c_{m+\ell}$ avec $0 < \ell < 2a_1a_2$.

α) c_{m+1}

$$I \quad \begin{cases} p_{2n}x + q_{2n}y = c_{m+1} \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$$

la solution de I est de la forme $(x_o^m + i\ ,\ y_o^m + j)$, or :

$$p_{2n}x + q_{2n}y = c_{m-1} \Rightarrow p_{2n}i + q_{2n}j = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i = -q_{2n-1} + h\, q_{2n} \\ j = p_{2n-1} - h\, p_{2n} \end{cases}$$

Donc la solution est à prendre parmi les $M_h = (-q_{2n-1} + h\, q_{2n}\ ,\ p_{2n-1} - h\, p_{2n})$; pour choisir il faut étudier $(x_o - q_{2n-1} + h\, q_{2n} + 1)(y_o + p_{2n-1} - h\, p_{2n} + 1)$ polynôme en h maximum pour $h_1 = [[\ \frac{2p_{2n}q_{2n-1} + 1}{2p_{2n}q_{2n}}\ ]]$ (entier le plus proche) alors M_{h-1}^m est la solution (il peut y en avoir deux [[0,5]]).

β) $c_{m+\ell}$ à partir de $M_{h\ell-1}$ par le même raisonnement on a :

$$M_{h\ell}^m = (x_o^m - \ell\, q_{2n-1} + h\, \ell\, q_{2n}\ ,\ y_o^m + \ell\, p_{2n-1} - \ell\, p_{2n})$$

avec $h\ell = [[\ \ell(\frac{2p_{2n}q_{2n-1} + 1}{2p_{2n}q_{2n}})\ ]]$.

d) Résolution de $I' \begin{cases} p_{2n-1}x + y_{2n-1}y = c \\ \max(x+1)(y+1) \end{cases}$

on a pour $c_{m+\ell}$ $\quad M^m_{h\ell} = (x^m_o + \ell\, q_{2n-2} + h\ell\, q_{2n-1}\ ,\ y^m_o - \ell p_{2n-2} - h\ell\, p_{2n-1})$

avec $h\ell = [[\ -\dfrac{\ell(2p_{2n-1}\, q_{2n-2} - 1)}{2p_{2n-1}\, q_{2n-1}}\ ]]$

Cas particulier : $p_3 = 2$, $q_3 = 3$, $h\ell = [[\ -\ell\frac{7}{12}\ ]]$

$c_{m+1}(3m-2\ ,\ 2m)$ $\qquad$ $c_{m+2}(3m\ ,\ 2m-1)$ $\qquad$ $c_{m+3}(3m-1\ ,\ 2m)$

$c_{m+4}(3m+1\ ,\ 2m-1)$ $\qquad$ $c_{m+5}(3m\ ,\ 2m)$ $\qquad$ c_{m+6} $\begin{matrix}(3m+2\ ,\ 2m-1) \\ (3m-1\ ,\ 2m+1)\end{matrix}$

$c_{m+2}(3m+1\ ,\ 2m)$ $\qquad$ $c_{m+8}(3m\ ,\ 2m+1)$ $\qquad$ $c_{m+9}(3m+2\ ,\ 2m)$

$c_{m+10}(3m+1\ ,\ 2m+1)$ $\qquad$ $c_{m+11}(3m+3\ ,\ 2m)$ $\qquad$ $c_{m+12}(3m+2\ ,\ 2m+1)$

e) Résolution de $\begin{cases} p_{2n}\ x + q_{2n}y \leq c \\ \max(x+1)(y+1) \end{cases}$ et $\begin{cases} p_{2n-1}x + q_{2n-1}\, y \leq c \\ \max(x+1)(y-1) \end{cases}$

par le même raisonnement que pour le résultat 3) on voit que pour $m > \dfrac{a_1 a_2}{4}$ les solutions de ces problèmes coïncident avec les solutions des problèmes I et I' ; ont dit que l'on a alors le régime permanent. Si l'on veut faire une étude avant le régime permanent et si l'on pose $\theta_\ell = h\ell - \ell\,\dfrac{(2p_{2n}\, q_{2n-1} + 1)}{2p_{2n}\, q_{2n}}$

cas pair, on aura pas de solutions pour les valeurs de $\ell+1$ tel que

$$\theta^2_{\ell+1} - \theta^2_\ell \geq \frac{4m\, a_1 a_2 + 2\ell + 1}{4\, a_1^2\, a_2^2}$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. RAMANUJAN, Highly composite numbers. Proc. London math. soc. series 2, t. 14, 1915, p. 347-409.

[2] J.-L. NICOLAS, Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan. Canadian Journal of Math. vol. 23, n°1, 1971, p. 116-130.

-:-:-:-

Gérard BESSI
U.E.R. des Sciences de Limoges
Département de Mathématiques
123, rue Albert Thomas
87100 LIMOGES

Deuxième Partie

NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSES

par

Gérard BESSI et Jean-Louis NICOLAS

INTRODUCTION

On dit qu'un nombre entier n est *hautement composé* si tout nombre plus petit que n a moins de diviseurs que n. Si l'on désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n et si la décomposition en facteurs premiers de n est : $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ on a : $d(n) = \prod_i (\alpha_i + 1)$ et la définition devient : n est 2-hautement composé si et seulement si $m < n$ entraîne $d(m) < d(n)$.

On restreint maintenant la définition des nombres hautement composés à $\mathcal{N}_2 = \{n \in \mathbb{N};\ n = 2^a 3^b,\ a \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{N}\}$.

La définition devient : n est *2-hautement composé (2-h. c.)* si $n \in \mathcal{N}_2$ et si pour tout $m \in \mathcal{N}_2$ avec $m < n$, on a : $d(m) < d(n)$.

Considérons pour a donné : $\max_{n \leq a,\ n \in \mathcal{N}_2} d(n)$. Soit n^* le plus petit entier où ce maximum est atteint. On voit que n^* est 2-h.c. Rechercher ce maximum revient à résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers (cf. [6]) :

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leq C = \log a \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$$

Tous les résultats que nous obtenons s'adaptent presque immédiatement pour résoudre le problème d'optimisation, pour α et β réel

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y \leq C ; \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \\ \max x y \end{cases}$$

et fournissent un algorithme de calcul de la solution. Probablement, les méthodes que nous utilisons peuvent s'adapter à des classes beaucoup

plus larges de problèmes d'optimisation en nombres entiers à *deux* variables. Le passage à 3 variables ou plus sera délicat. En effet, nous utiliserons essentiellement les approximations rationnelles d'un nombre réel, et la théorie des fractions continues nous donne pour cela des résultats précis. L'algorithme de Jacobi-Perron, qui généralise l'algorithme des fractions continues, est moins satisfaisant.

De même que Ramanujan [8] a introduit les nombres hautement composés supérieurs on peut définir les nombres *2-hautement composés supérieurs (2-h. c. s.)* par : (cf. : [1])

$$N \text{ 2-h. c. s.} \iff N \in \mathcal{N}_2 \text{ et : } \exists\ \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\ M \in \mathcal{N}_2,\ \frac{d(M)}{M^{\varepsilon}} \leqslant \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$$

Pour $M < N$, on a : $d(M) \leqslant (\frac{M}{N})^{\varepsilon}\, d(N)$. Ainsi tout nombre 2-h. c. s. est 2-h. c. On peut montrer également que (cf. [1]) : Le nombre $N = 2^a 3^b$ est 2-h. c. s. si et seulement si

$$(1)\qquad \frac{1}{(1+1/b)^{\theta}-1} - 1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{(1+1/(b+1))^{\theta}-1}$$

$$\text{avec } \theta = \frac{\log 2}{\log 3} = 0{,}631$$

Dans [1] pour étudier $Q(X) = \text{card}\{n \text{ 2-h. c.}; n \leqslant X\}$, nous étions amenés à étudier $\mathcal{C}(N) = \text{card}\{n \text{ 2-h. c.};\ N \leqslant n < 3N\}$ dans le cas où N est 2-h. c. s..Le but de cet article sera de calculer $\mathcal{C}(N)$ lorsque N est 2-h. c.

La première remarque est d'écrire les éléments de $\mathcal{N}_2$ compris entre $N = 2^a 3^b$ et $3N$ sous la forme :

$$M_i = 2^{a+i}\, 3^{b-h(i)}$$

L'écriture est unique, et $N \leqslant M_i < 3N$ donne : $h(i) = [i\theta]$ avec $[x]$ = partie entière de x.

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes suivants :

THEOREME 1 -

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-hautement composé. Il existe deux entiers $i_o \geqslant 0$ et $i'_o \geqslant 0$ tels que tous les nombres n

2-hautement composés vérifiant $N \leqslant n < 3N$ *soient de la forme*

$$n = M_i = 2^{a+i}\, 3^{b-[i\,\theta]}$$

avec $-i'_o \leqslant i \leqslant i_o$. *Ces nombres sont classés suivant les valeurs de* $\{i\,\theta\} = i\,\theta - [i\,\theta]$.

Définition de la fonction ϕ -

Soit p_k/q_k le k-ème convergent dans le développement en fraction continue de $\theta = (\log 2) / \log 3$. Les valeurs de p_k/q_k , pour $k = 0, 1, \ldots$ sont :

$\frac{0}{1}$; $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{12}{19}$; $\frac{41}{65}$; $\frac{53}{84}$; $\frac{306}{485}$; $\frac{665}{1054}$; $\frac{15601}{24727}$; etc

Pour x réel, $x > 1$, on définit q_k tel que $q_k \leqslant x < q_{k+1}$ puis $r = \left[\frac{x - q_{k-1}}{q_k}\right]$ et $q = r\,q_k + q_{k-1}$. On pose alors :

$$\phi(x) = \theta\, q_k\, q(2\,x - q - q_k)$$

La fonction ϕ est linéaire par morceau, croissante, continue et convexe. Elle admet une fonction réciproque notée ϕ^{-1}.

THEOREME 2 -

Soit $N = 2^a\, 3^b$ *un nombre 2-hautement composé, vérifiant* $a \geqslant 345$. *On pose* $x_a = \phi^{-1}(a + 1)$. *Soit* $\mathcal{C}(N) = i_o + i'_o + 1$ *le nombre de nombres* n *2-hautement composés, vérifiant* $N \leqslant n < 3N$. *On a :*

$$x_a - 2 \leqslant \mathcal{C}(N) \leqslant x_a + 2$$

De plus, on sait calculer à une unité près les nombres i_o et i'_o et le théorème 1 permet ainsi de décrire l'ensemble des nombres 2-hautement composés.

L'idée de la démonstration du théorème 1 est simple : Si n n'est pas 2-h. c., il existe $m < n$, $m \in \mathcal{N}_2$ tel que $d(m) \geqslant d(n)$ On dit alors que m *barre* n. On remarque encore, que si n n'est pas 2-h. c. il est barré par le nombre 2-h. c. qui le précède. Il suffit alors de constater que si M_i (avec $i \geqslant o$) n'est pas 2-h. c., alors M_{i+1} n'est pas non plus 2-h. c.

Dans la démonstration du théorème 2, on suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'on suppose i_o et i'_o connus. On obtient alors 4 inégalités fondamentales, (proposition 3), en écrivant que M_{i_o+1} est barré par le nombre 2-h. c. qui le précède, tandis que M_{i_o} n'est pas barré; et de même pour $M_{-i'_o-1}$ et $M_{-i'_o}$. Le calcul du nombre 2-h. c. qui précède M_{i_o+1} repose sur le rangement des nombres réels $\{i\ \theta\}$ pour $-i'_o \leq i \leq i_o$, rangement qui est donné par un beau résultat de calcul modulo 1 (Proposition 2). Il reste alors à manipuler les 4 inégalités, le plus délicat étant lorsque x_a voisine les ruptures de pente de la fonction ϕ.

Pour finir (Proposition 6) on déduit du théorème 2 une estimation de $Q(X)$ = card $\{n \leq X,\ n$ -2-h. c.$\}$.

Nous avons plaisir à remercier Monsieur GIRY du Centre de Calcul de l'Université de LIMOGES qui a dressé, en utilisant leur définition, une table des nombres 2-h. c. inférieurs à 10^{80}. Cette table nous a permis de conjecturer, de démontrer, puis de vérifier nos résultats qui en retour donnent un algorithme de calcul des nombres 2-h. c.

§ 1

REPARTITION MODULO 1

On note pour x réel :

$[x]$ = partie entière de x

$\{x\}$ = partie fractionnaire de x

$\|x\| = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x-n| = \min(\{x\}, 1-\{x\})$

= distance à l'entier le plus proche.

Soit θ un nombre irrationnel positif. On écrit son développement en fraction continue. $\theta = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, en suivant les notations de Hardy and Wright ([2], ch. 10) ou de Lang ([4]). Soit p_k/q_k les convergents principaux. On sait que l'on a :

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} \quad \text{et} \quad p_{k+1} = a_{k+1} p_k + p_{k-1}$$

Les convergents intermédiaires sont :

$$\frac{p}{q} = \frac{r\, p_k + p_{k-1}}{r\, q_k + q_{k-1}} \quad \text{avec} \quad 1 \leq r < a_{k+1}$$

PROPOSITION 1 -

Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, et θ un nombre irrationnel. On pose :

$$\min_{1\leq n\leq m} \{n\theta\} = \{q\theta\} \quad \text{et} \quad \max_{1\leq n\leq m} \{n\theta\} = \{q'\theta\}$$

Soit k défini par $q_k \leq m < q_{k+1}$. Lorsque k est pair on a :

$$q = q_k \quad q' = r\, q_k + q_{k-1} \quad \text{avec} \quad r = \left[\frac{m - q_k}{q_{k+1}}\right]$$

Lorsque k est impair, on a :

$$q = r\, q_k + q_{k-1} \quad \text{et} \quad q' = q_k \quad \text{avec} \quad r = \left[\frac{m - q_k}{q_{k+1}}\right]$$

Définition -

On posera : $q = q(m)$ = p. g. d. p.(m) *(plus grand dénominateur de convergent d'indice pair)* et $q' = q'(m)$ = p. g. d. i.(m) *(plus grand dénominateur d'indice impair)*.

Les p. g. d. p. successifs sont :

1, 2, 5, 8, 27, 46, 65, 149, 233, 317, 401, 485, 1539, etc ...

Les p. g. d. i. successifs sont :

1, 3, 11, 19, 84, 569, 1054, etc ...

(On a souligné les dénominateurs de convergents principaux).

La démonstration de la proposition 1 se trouve dans : Släter ([9]), Lang ([4]), Tijdeman ([10]); ainsi que la démonstration des formules suivantes, qui nous serviront par la suite :

Soit q = p. g. d. p(m) et q' = g. g. d. i(m)

Les numérateurs associés sont :

$$p = q\,\theta - \|\theta\, q\| \quad \text{et} \quad p' = q'\theta + \|\theta\, q'\|$$

On a alors :

$$(2) \qquad q\,p' - p\,q' = 1$$

$$(3) \qquad \frac{\|\theta\, q\|}{q} + \frac{\|\theta\, q'\|}{q'} = \frac{1}{q\,q'}$$

$$(4) \qquad \|\theta\, q\| = \{\theta\, q\} < \frac{1}{q'} \quad \text{et} \quad \|\theta\, q'\| = 1 - \{\theta\, q'\} < \frac{1}{q}$$

$$(5) \qquad q + q' \geq m + 1$$

Pour $1 \leq n \leq m$, on a :

$$(6) \qquad \left[\theta(n-q)\right] = \left[\theta\, n\right] - p \quad \text{et} \quad \left[\theta(q'-n)\right] = p' + \left[-n\,\theta\right]$$

PROPOSITION 2 -

On range les nombres $\{n\,\theta\}$ *pour* $n' \leq n \leq n''$ *en une suite :*

$$\{n_1\,\theta\},\ \ldots,\ \{n_i\,\theta\},\ \ldots\ \{n_{n''-n'+1}\,\theta\}$$

On pose q = p. g. d. p.$(n''-n')$ *et* q' = p. g. d. i.$(n''-n')$. *Les différences* $n_{i+1} - n_i$ *ne prennent que 3 valeurs :*

1) $n_{i+1} - n_i = q$

2) $n_{i+1} - n_i = -q'$

3) $n_{i+1} - n_i = q - q'$

La démonstration de la proposition 2 se trouve dans Släter ([9]) qui donne un historique complet du sujet.

On peut voir facilement qu'il y a un ordre de priorité entre les 3 valeurs : La troisième n'est jamais prioritaire; l'un des deux dénominateurs q et q' est principal, et celui qui est principal est prioritaire.

Exemple - $= \frac{\log 2}{\log 3}$; $n' = -14$, $n'' = 25$; $n'' - n' = 39$

d'où, $q = 27$; $q' = 19$ (principal). Les nombres $\{n\theta\}$ sont rangés suivant la suite : $n_i = 0, 8, -11, 16, -3, 24, 5, -14, 13$, etc ...

Définition de ϕ -

Soit x réel ≥ 1, on définit :

$$q = \text{p. g. d. p.}([x]) \quad \text{et} \quad q' = \text{p. g. d. i.}([x])$$

et $\phi(x) = \theta\, q\, q'\, (2x - q - q')$.

Compte-tenu de la proposition 1, on retrouve la définition donnée dans l'introduction.

§ 2

DEMONSTRATION du THEOREME 1

Définition -

On dit que m barre n, si l'on a :

$$m < n \quad \text{et} \quad d(m) \geq d(n)$$

LEMME 1 -

Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

i) *n n'est pas 2-h. c.*

ii) *Il existe un nombre m qui barre n*

iii) *Il existe un nombre 2-h. c. qui barre n.*

iiii) *Le plus grand nombre 2-h. c. qui précède n, barre n.*

Démonstration -

La définition des nombres 2-h. c. montre : *i* $\Longleftrightarrow$ *(ii)*. Montrons maintenant *ii* $\Longrightarrow$ *iii*. On a : m barre n. Si nous supposons que m n'est pas 2-h. c. alors il existe $m_1 < m$ et

$d(m_1) \geq d(m) \geq d(n)$, donc si l'on suppose qu'il n'existe pas de nombres 2-h. c. qui barre n on pourrait construire dans $\mathbb{N}$ une suite strictement décroissante infinie, ce qui est impossible.

On démontre *iii* $\Rightarrow$ *iiii*, en remarquant que si m est un nombre 2-h. c. qui barre n, tout nombre 2-h. c. m', vérifiant $m < m' \leq n$ barre a fortiori n.

Enfin, on a de façon évidente *iiii* $\Rightarrow$ *ii*.

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-h. c. donné. On a vu que les éléments $n \in \mathcal{N}_2$ vérifiant $N \leq n < 3N$ s'écrivaient de façon unique sous la forme

$$M_i = 2^{a+i} 3^{b-h(i)} = 2^i 3^{-h(i)} N \text{ avec } h(i) = [i\theta] \text{ et } \theta = \frac{\log 2}{\log 3}$$

LEMME 2 - *(lemme de barrage)*

On a :

M_j *barre* $M_i \Rightarrow (j-i)(b+1) - a + 1)(h(j) - h(i)) \geq j\,h(j) - i\,h(i)$

$M_j < M_i$ *et* M_j *ne barre pas* $M_i \Rightarrow (j-i)(b+1) - (a+1)(h(j) - h(i))$

$< j\,h(j) - i\,h(i)$

Démonstration -

M_j barre M_i entraîne que $d(M_j) \geq d(M_i)$

donc $(a + j + 1)(b - h(j) + 1) \geq (a + i + 1)(b - h(i) + 1)$

ce quidonne $(j-i)(b+1) - (a+1)(h(j) - h(i)) \geq j\,h(j) - i\,h(i)$

M_j ne barre pas M_i et $M_j < M_i$ entraîne : $d(M_j) < d(M_i)$ soit :

$$(j-i)(b+1) - (a+1)(h(j) - h(i)) < j\,h(j) - i\,h(i)$$

LEMME 3 -

Si $i > 0$, M_j *barre* $M_i \Rightarrow j < i$

Si $i < 0$, M_j *barre* $M_i \Rightarrow j > i$

Démonstration -

D'après le lemme précédent, si M_j barre M_i, on a :

$$(7) \quad (j-i)(b+1) - (a+1)(h(j) - h(i)) \geq j\,h(j) - i\,h(i) \ .$$

D'autre part, si M_j barre M_i, on a aussi : $M_j < M_i$ soit :

$$2^j\, 3^{-h(j)}\, N < 2^i\, 3^{-h(i)}\, N$$

c'est-à-dire $$2^{j-i}\, 3^{h(i)-h(j)}\, N < N$$

Comme N est 2-h. c. cela entraîne :

$$d(2^{j-i}\, 3^{h(i)-h(j)}\, N) < d(N)$$

ce qui donne :

$$(8) \quad (j-i)(b+1) - (a+1)(h(j) - h(i)) < (j-i)(h(j) - h(i))$$

Les inégalités (7) et (8) donnent :

$$j\,h(j) - i\,h(i) < (j-i)(h(j) - h(i))$$

$$i\,h(j) + j\,h(i) < 2\,i\,h(i)$$

et donc : Si i fixé et $i > 0$, on peut regarder le membre de gauche comme une fonction croissante en j et l'inégalité entraîne que $j < i$.

Si i fixé et $i < 0$, on peut regarder le membre de droite comme une fonction décroissante en j et l'inégalité entraîne que $j > i$.

LEMME 4 -

Si $i > 0$, M_i barré $\Rightarrow$ M_{i+1} barré

Si $i < 0$, M_i barré $\Rightarrow$ M_{i-1} barré

Démonstration -

Premier cas, $i > 0$. Si M_i est barré, ce qui veut dire qu'il n'est pas 2-h. c., il est barré par un nombre n, vérifiant $2^a\, 3^b \leq n < M_i$ (Lemme 1, iiii). On peut donc écrire $n = M_j$. Nous avons :

$$d(M_{i+1}) = d(M_i) - (h(i+1) - h(i))(a + j + 1) + b + 1 - h(i+1)$$

On pose :

$$\tilde{M}_j = 2^{a+j+1}\, 3^{b-h(j)+h(i)-h(i+1)}$$

et l'on a :

$$d(\tilde{M}_j) = d(M_j) - (h(i+1) - h(i))(a + j + 1) + b - h(j) + 1 + h(i) - h(i+1)$$

Or, d'après le lemme 3, on a : $j < i$ et $h(j) \leq h(i)$. Comme $d(M_j) \geq d(M_i)$ on déduit $d(\tilde{M}_j) \geq d(M_i)$.

D'autre part :

$$M_{i+1} = \tilde{M}_j \, 2^{i-j} \, 3^{h(j)-h(i)} = \tilde{M}_j \, \frac{M_i}{M_j} > \tilde{M}_j$$

et $\tilde{M}_j$ barre M_{i+1} .

Deuxième cas, $i < 0$. La démonstration est identique en prenant

$$\tilde{M}_j = 2^{a+j-1} \, 3^{b-h(j)+h(i)-h(i+1)}$$

Démonstration du Théorème 1 -

On définit i_o comme le plus petit entier (vérifiant $h(i_o) \leq b$) tel que M_{i_o} soit 2-h. c. et M_{i_o+1} ne le soit pas. On a $i_o \geq 0$. On définit de même i'_o comme le plus petit entier (vérifiant $i'_o \leq a$) tel que $M_{-i'_o}$ soit 2-h. c. et $M_{-i'_o-1}$ ne le soit pas. On a $i'_o \geq 0$. L'ensemble des nombres 2-h. c. compris entre N et 3 N est d'après le lemme 4, l'ensemble des M_i avec $-i'_o \leq i \leq i_o$.

Maintenant, de la relation : $N \leq M_i < 3\,N$ et de :

$$M_i = 2^i \, 3^{-h(i)} \, N$$

on déduit la relation :

$$\log \frac{M_i}{N} = \log 3 \quad \{i\,\theta\}$$

qui montre que les M_i sont rangés comme $\{i\,\theta\}$

§ 3

DEMONSTRATION du THEOREME 2

PROPOSITION 3 -

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-h. c. Soit i_o et i'_o fournis par le théorème 1. On pose : (cf. proposition 1)

$q = p.\,g.\,d.\,p\,(i_o + i'_o + 1)$ et $q' = p.\,g.\,d.\,i\,(i_o + i'_o + 1)$ et p et p' les numérateurs associés. On a alors :

$$(A) \quad i_o\,p + q\,[i_o\,\theta] < (b+1)\,q - (a+1)\,p + p\,q$$

$$(A') \quad i'_o\,p' - q'\,[-i'_o\,\theta] < (a+1)\,p' - (b+1)\,q' + p'\,q'$$

(B) $(b+1)\,q - (a+1)\,p + p\,q < (i_o+1)\,p + q\,[(i_o+1)\,\theta]$

(B') $(a+1)\,p' - (b+1)\,q' + p'\,q' < (i'_o+1)\,p' - q'\,[-(i'_o+1)\,\theta]$

et les inégalités (A) et (A') sont encore valables pour $q = p.\,g.\,d.\,p.\,(i_o + i'_o)$ *et* $q' = p.\,g.\,d.\,i.\,(i_o + i'_o)$.

Démonstration -

On écrit que M_{i_o} qui est 2-h. c. n'est barré par aucun nombre et en particulier par $M_{i_o - q}$. Le lemme de barrage (lemme 2) donne :

$$-q(b+1) - (a+1)\,([(i_o - q)\theta] - [i_o\,\theta]) < (i_o - q)\,[(i_o - q)\theta] - i_o\,[i_o\,\theta]$$

Pour $i_o \geqslant 1$ la formule (6) donne, puisque $i_o \leqslant i_o + i'_o + 1$

$$[(i_o - q)\theta] = [i_o\,\theta] - p$$

et l'on obtient (A).

Pour $i_o = 0$, (A) se prouve en écrivant que N, qui est 2-h. c. n'est pas barré par $2^{-q}\,3^{p}\,N$.

Il reste à étudier la possibilité que $M_{i_o - q} = 2^{a+i_o-q}\,3^{b-[(i_o-q)\theta]}$ ne soit pas un nombre entier. Comme $M_{-i'_o}$ est un nombre entier, cela entraîne $q = i_o + i'_o + 1$ et $a = i'_o$. Dans ce cas, (A) se réduit a :

$$(q - a - 1)\,p + q\,[i_o\,\theta] < (b+1)\,q - (a+1)\,p + p\,q$$

c'est-à-dire $[i_o\,\theta] < (b+1)$, ce qui est vrai puisque M_{i_o} est un nombre entier.

L'inégalité (A') se démontre de la même manière en écrivant que $M_{-i'_o}$, qui est 2-h. c. n'est pas barré par $M_{q'-i'_o}$.

L'inégalité (B) s'obtient en écrivant que M_{-i_o+1} n'est pas 2-h. c. donc il est barré par le nombre 2-h. c. qui le précède (lemme 1). Si l'on range les nombres M_i pour $-i'_o \leqslant i \leqslant i_o + 1$, ces nombres sont rangés comme $\{i\,\theta\}$, et le prédécesseur de M_{i_o+1} est (par la proposition 2) M_{i_o+1-q}. Le lemme de barrage donne alors :

$$-q(b+1) - (a+1)([(i_o + 1 - q)\theta] - [(i_o+1)\theta]) \geqslant (i_o + 1 - q)\,[(i_o + 1 - q)\theta] - (i_o + 1)\,[(i_o+1)\theta]$$

Mais, par la formule (6), puisque $1 \leq i_o + 1 \leq q$, on a :

$$[(i_o + 1 - q)\theta] = [(i_o + 1)\theta] - p$$

et l'on obtient (B).

On constate que la formule (B) est encore vérifiée même si M_{i_o+1} n'est pas un nombre entier, c'est-à-dire si $[(i_o + 1)\theta] > b$.

Enfin, on démontre (B') en écrivant que $M_{-i'_o-1}$ est barré par $M_{q'-i'_o-1}$.

MINORATION de $\mathcal{C}(N)$ -

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-h. c.; on pose $\mathcal{C}(N) = i_o + i'_o + 1$ le nombre de nombres 2-h. c. appartenant à l'intervalle $[N, 3N[$. On définit q = p. g. d. p. $(i_o + i'_o + 1)$ et q' = p. g. d. i.$(i_o + i'_o + 1)$. La proposition (3) s'applique; en multipliant (B) par q' et (B') par q, et en ajoutant, il vient :

$$(9) \quad (a+1)(p'q - pq') + qq'(p + p') < (i_o + 1)\, pq' + (i'_o + 1)\, p'q + qq'([(i_o + 1)\theta] - [-(i'_o + 1)\theta])$$

Compte tenu de : $p' q - p q' = 1$ (formule (2))

de : $p = q\,\theta - \|q\,\theta\|$, de : $p' = q'\,\theta + \|q'\,\theta\|$ et de : $[x] = x - \{x\}$,

(9) devient :

$$(a+1) < \theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o + 4 - q - q') - (i_o + 1) + q\|\theta q'\|\,(i_o + i'_o + 2) + q\, q'\, R$$

avec :

$$R = \{-(i'_o + 1)\theta\} - \{(i_o + 1)\theta\} + \|\theta\, q\| - \|\theta\, q'\|$$

On majore R de la façon suivante : Par définition du p. g. d. p, on a :

$$\|\theta\, q\| \leq \{(i'_o + 1)\theta\}$$

d'où l'on tire :

$$\{-(i'_o + 1)\theta\} = 1 - \{(i'_o + 1)\theta\} \leq 1 - \|\theta\, q\|$$

et : $$R \leq 1 - \|\theta\, q'\|$$

On sait aussi que :

$$i_o + i'_o + 2 \leq q + q' \quad \text{(formule (5))}$$

On a donc :

$$(a+1) < \theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o + 4 - q - q') + q\, \|\theta\, q'\|\, (q + q') + q\, q'(1 - \|\theta\, q'\|)$$

et comme $q\, \|\theta\, q'\| < 1$, on obtient :

$$(10) \qquad a + 1 < \theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o + 4 - q - q') + q + q\, q' \ .$$

D'autre part, $\phi(\mathcal{C}(N)) = \theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o + 2 - q - q')$ et par la convexité de ϕ, $\phi(\mathcal{C}(N) + u) \geq \phi(\mathcal{C}(N)) + 2\,\theta\, q\, q'\, u$.

L'inégalité (10) implique donc :

$$(11) \qquad (a+1) < \phi(\mathcal{C}(N) + 1) + 2\, q\, q' < \phi(\mathcal{C}(N) + 2{,}6)$$

Comme la fonction ϕ est croissante, on obtient :

$$\mathcal{C}(N) > x_a - 2{,}6$$

Pour $a \geq 345 > \phi(12{,}6)$, on a donc $\mathcal{C}(N) > 10$; soit $\mathcal{C}(N) \geq 11$ d'où $q' \geq 11$ et

$$q\, q' + q = q\, q'\left(1 + \frac{1}{q'}\right) \leq q\, q'\, \frac{12}{11} \leq 0{,}87\ (2\,\theta\, q\, q')$$

D'où l'on a, pour $a \geq 345$,

$$\mathcal{C}(N) > x_a - 1{,}87 > x_a - 2$$

MAJORATION de $\mathcal{C}(N)$ -

La majoration est un peu plus délicate à cause de la convexité de ϕ. Il faut étudier soigneusement ce qui se passe au voisinage des abscisses de changement de pente de ϕ.

Nous supposons $a \geq 345$ de sorte que $\mathcal{C}(N) \geq 11$. On remarque d'abord que tout entier assez grand, et en particulier $\mathcal{C}(N)$ peut s'écrire en fonction des dénominateurs de convergents principaux de θ, sous la forme :

$$(12) \qquad \mathcal{C}(N) = (r+1)\, q_m + q_{m-1} + k \quad \text{avec} \quad r \geq 0,\ m \geq 0,\ 0 \leq k \leq q_m - 1$$

Nous allons distinguer 3 cas : le cas général, $2 \leq k$, puis $k = 1$ et enfin $k = 0$: Nous supposerons pour simplifier que m est pair, de sorte que l'on a :

$$q = \text{p. g. d. p. } (\mathcal{C}(N)) = q_m$$

et $$q' = \text{p. g. d. i. } (\mathcal{C}(N)) = (r+1)\, q_m + q_{m-1}$$

1) $k \geq 2$. Le calcul est du même type que pour la minoration. On multiplie (A) par q', (A') par q et on ajoute : Il vient :

$$i_o\, p\, q' + i'_o\, p'\, q + q\, q'([i_o\, \theta]-[-i'_o\, \theta]) < (a+1)(p'\, q - p\, q') + q\, q'\,(p + p')$$

et ensuite :

$$(13)\quad \theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o - q - q') + i'_o - q' \,\|\theta\, q\|(i_o + i'_o) + q\, q'\, R < a + 1$$

avec

$$(14)\qquad R = \{-i'_o\, \theta\} - \{i_o\, \theta\} + \|\theta\, q\| - \|\theta\, q'\|$$

Si $i_o \neq 0$ (et pour $i_o = 0$, de façon évidente) on a par la définition du p. g. d. i. :

$$\{i_o\, \theta\} \leq 1 - \|\theta\, q'\|$$

ce qui assure : $\qquad -1 + \|\theta\, q\| < R$

On en déduit :

$$\theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o - q - q') - q' \,\|\theta\, q\|\,(q + q') + q\, q'(-1 + \|\theta\, q\|) < a + 1$$

et comme $q' \,\|\theta\, q\| < 1$ (formule (4)), on a :

$$\theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o - q - q') - q' - q\, q' < a + 1$$

Maintenant, $\phi(\mathcal{C}(N) - 1) = \theta\, q\, q'(2\, i_o + 2\, i'_o - q - q')$

et comme $k \geq 2$, $\quad \phi(\mathcal{C}(N) - 2) = \phi(\mathcal{C}(N) - 1) - 2\,\theta\, q\, q'$

et ϕ est linéaire entre $\mathcal{C}(N) - 2$ et $\mathcal{C}(N)$. Lorsque $a \geq 345$, $\mathcal{C}(N) \geq$

d'où $q \geq 8$ et :

$$q' + q\, q' = q\, q'\left(1 + \frac{1}{q}\right) \leq \frac{9}{8}\, q\, q' \leq 0{,}9(2\,\theta\, q\, q')$$

d'où :

$$\mathcal{C}(N) < x_a + 1{,}9$$

2) $k = 1$. Le calcul est identique, jusqu'au calcul de R (14) que l'on peut ici minorer plus finement :

Comme on a : $\mathcal{C}(N) = q' + 1 = i_o + i'_o + 1$, d'où $q' = i_o + i'_o$

il vient :

$$(15)\qquad \{i_o\, \theta\} + \{i'_o\, \theta\} = 1 - \|\theta\, q'\|$$

et $\qquad R = 1 - \{i'_o\, \theta\} - \{i_o\, \theta\} + \|\theta\, q\| - \|\theta\, q'\| > \|\theta\, q\|$

(13) devient alors :

$$\phi(\mathcal{C}(N) - 1) - q'^2 \|\theta q\| + q\, q' \|\theta q\| < a + 1$$

et comme $q' \|\theta q\| < 1$ (formule (4)),

$$\phi(\mathcal{C}(N) - 1) - (q' - q) < a + 1 \qquad (16)$$

Pour $0 < u < 1$, $\phi(\mathcal{C}(N) - 1 - u) = \phi(\mathcal{C}(N) - 1) - 2\theta q(q' - q)\, u$

ce qui entraîne pour $q \geq 8$

$$\mathcal{C}(N) < x_a + 1 + \frac{1}{16\theta} < x_a + 1{,}1$$

Dans le cas où la formule (12) donnerait une valeur impaire de m, (15) deviendrait :

$$\{i_o\, \theta\} + \{i'_o\, \theta\} = 1 + \|\theta q\|$$

et (16) deviendrait :

$$\phi(\mathcal{C}(N) - 1) - (q' + q) < a + 1$$

ce qui assure encore : $\mathcal{C}(N) < x_a + 1{,}9$.

3) $k = 0$. On a maintenant :

$$\mathcal{C}(N) = q' \quad \text{soit} \quad i_o + i'_o = q' - 1$$

La proposition 3 dit que (A') est encore valable si l'on remplace q' par p. g. d. i. $(i_o + i'_o)$ qui vaut ici $(q' - q)$ et p' sera remplacé par $p' - p$. En faisant ce remplacement jusqu'à (13), on obtient :

$$3\, q(q' - q)(2\, i_o + 2\, i'_o - q - (q' - q)) + 1 -$$

$$- (q' - q)\|\theta q\| (i_o + i'_o) + q(q' - q) R < a - 1 \qquad (17)$$

avec : $R = \{-i'_o\, \theta\} - \{i_o\, \theta\} + \|\theta q\| - \|\theta(q' - q)\|$.

Comme $(q' - q)$ = p. g. d. i. $(i_o + i'_o)$ on minore R comme en (14) :

$$-1 + \|\theta q\| < R$$

Maintenant, comme $q \geq 2$, pour $0 < u < 1$,

$$\phi(\mathcal{C}(N) - 1 - u) = \theta q(q' - q)(2\, i_o + 2\, i'_o - q') - 2\, u\, \theta\, q(q' - q)$$

et (17) donne :

$$\phi(\mathcal{C}(N) - 1) - (q' - q)\|\theta q\| q' + q(q' - q)(-1 + \|\theta q\|) < a + 1$$

$$\phi(\mathcal{C}(N) - 1) - (q' - q) - q(q' - q) < a + 1$$

Le membre de gauche s'écrit $\phi(\mathcal{C}(N) - 1 - u)$ avec

$$u = \frac{1}{2\theta} \frac{(q' - q)(q + 1)}{q(q' - q)} = \frac{1}{2\theta} \frac{q + 1}{q} \leq \frac{9}{16\theta} < 0{,}9 \quad \text{pour} \quad q \geq 8.$$

Et l'on obtient encore :

$$\mathcal{C}(N) \leq x_a + 1{,}9$$

Dans le cas où la formule (12) donnerait une valeur impaire de m, ce qui se produirait pour $\mathcal{C}(N) \geq 27$, on aurait un calcul similaire.

§ 4

CALCUL de i_o et i'_o

PROPOSITION 4 -

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-h. c. tel que $a \geq 345$. Soit i_o et i'_o fournis par le théorème 1. On pose (cf. proposition 1)

$$q = \text{p. g. d. p. } (i_o + i'_o + 1)$$

$$\text{et } q' = \text{p. g. d. i. } (i_o + i'_o + 1)$$

$$\delta = b + 1 - (a + 1)\theta$$

et p et p' les numérateurs associés. On a alors :

$$(18) \qquad 2 i_o = (a + 1) \frac{\|\theta q\|}{\theta q} + q + \frac{\delta}{\theta} + \gamma \quad \text{avec} \quad |\gamma| < 2$$

$$(19) \qquad 2(i'_o + 1) = (a + 1) \frac{\|\theta q'\|}{\theta q'} + q' - \frac{\delta}{\theta} + \gamma' \quad \text{avec} \quad |\gamma'| < 2.$$

Démonstration -

En divisant, dans la proposition 3, (A) et (B) par q, on obtient :

$$i_o \frac{p}{q} + \left[i_o \theta\right] < (b + 1 - (a + 1) \frac{p}{q} + p < (i_o + 1) \frac{p}{q} + \left[(i_o + 1)\theta\right]$$

En écrivant : $p = q\theta - \|\theta q\|$, le terme central devient :

$$(b + 1) - (a + 1)\theta + (a + 1) \frac{\|\theta q\|}{q} + q\theta - \|\theta q\|$$

Le majorant devient :

$$(i_o + 1) \frac{p}{q} + \left[(i_o + 1)\theta\right] = 2(i_o + 1)\theta - \frac{(i_o + 1)\|\theta q\|}{q} - \{(i_o + 1)\theta\}$$

$$\leq 2(i_o + 1)\theta - \|\theta q\|$$

en tenant compte de : $\|\theta q\| \leq \{(i_o + 1)\theta\}$

Le minorant devient :

$$i_o \frac{p}{q} + [i_o \theta] \geq i_o \theta - \frac{i_o \|\theta q\|}{q} + i_o \theta - 1 \geq 2 i_o \theta - 2 \theta$$

en tenant compte de :

$$\frac{i_o \|\theta q\|}{q} \leq \frac{q + q'}{q q'} \leq 2 \theta - 1$$

pour $(a + 1) \geq 345$.

Tout cela démontre la relation (18). La relation (19) se démontre de même.

PROPOSITION 5 -

Soit $N = 2^a 3^b$ un nombre 2-h. c. avec $a \geq 345$. Soit x_a défini par $(a + 1) = \phi(x_a)$. Soit

$$Q = p.\ g.\ d.\ p.\ ([x_a]) \quad et \quad Q' = p.\ p.\ d.\ i.\ ([x_a])$$

On a alors :

$$2 i_o = (a + 1) \frac{\|\theta Q\|}{\theta Q} + Q + \frac{\delta}{\theta} + \gamma \quad avec \quad |\gamma| < 2$$

$$2(i'_o + 1) = (a + 1) \frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} + Q' - \frac{\delta}{\theta} + \gamma' \quad avec \quad |\gamma'| < 2$$

Démonstration -

Compte tenu du théorème 1, on aura très fréquemment $Q = q$ et $Q' = q'$ et la proposition 4 donne alors le résultat. Il reste à envisager le cas où x_a s'écrit :

$$x_a = (r + 1) q_m + q_{m-1} + \eta \quad avec \quad r \in \mathbb{N} \quad et \quad |\eta| < 2.$$

On supposera m pair; pour m impair, on aurait une démonstration analogue. On aura alors $Q = q = q_m$.

Supposons que l'on ait :

$$(20) \qquad i_o + i'_o + 1 = \mathcal{E}(N) < x_a$$

D'après la définition de Q et Q', on a :

$$a + 1 = \phi(x_a) = \theta Q Q' (2 x_a - Q - Q')$$

et compte tenu de : $\frac{\|\theta Q\|}{Q} + \frac{\|\theta Q'\|}{Q'} = \frac{1}{Q Q'}$ (formule 3)

on en déduit :

$$(a + 1) \frac{\|\theta Q\|}{\theta Q} + Q + (a + 1) \frac{\|\theta Q'\|}{\theta Q'} + Q' = 2 x_a$$

et cela nous donne la majoration :

$$2(i'_o + 1) < 2\,x_a - 2\,i_o < 2\,x_a - (a+1)\,\frac{\|\theta\,Q\|}{\theta\,Q} - Q - \frac{\delta}{\theta} + 2$$

$$< (a+1)\,\frac{\|\theta\,Q'\|}{\theta\,Q'} + Q' - \frac{\delta}{\theta} + 2.$$

Pour la minoration, si $q' \neq Q'$, on a : $q' = Q' - q$, et d'autre part :

$$\frac{\|\theta\,q\|}{q} + \frac{\|\theta\,q'\|}{q'} = \frac{1}{q\,q'} \qquad \text{(formule (3))}$$

Cela nous donne, compte tenu de $\phi(x_a) = \theta\,q\,Q'(2\,x_a - Q' - q)$:

$$(a+1)\,\frac{\|\theta\,Q'\|}{\theta\,Q'} + Q' = (a+1)\,\frac{\|\theta\,q'\|}{\theta\,q'} + q' + \frac{\phi(Q') - \phi(x_a)}{Q'\,q'}$$

La fonction ϕ est croissante, et $Q' < x_a$ donc :

$$2(i'_o + 1) > (a+1)\,\frac{\|\theta\,q'\|}{\theta\,q'} + q' - \frac{\delta}{\theta} - 2 > (a+1)\,\frac{\|\theta\,Q'\|}{\theta\,Q'} - \frac{\delta}{\theta} - 2$$

Ce qui achève la démonstration dans l'hypothèse (20).

Pour $i_o + i'_o + 1 > x_a$, on procéderait de même.

Applications numériques -

Soit $a = 11000$, $b = 6940$. $N = 2^a\,3^b$ est 2-h. c. s. par (1).

On calcule x_a : 39,98, d'où, sans ambiguité,

$$Q = q = 27 \qquad p = 17$$

$$Q' = q' = 19 \qquad p' = 12$$

La proposition 4 donne alors :

$2\,i_o = 49{,}89 + \gamma$ soit : $i_o = 24$ ou 25

$2(i'_o + 1) : 30{,}03 + \gamma'$ soit : $i'_o = 14$ ou 15

On précise alors la valeur de i_o et i'_o par la proposition 3 :

On a : $(b+1)\,q - (a+1)\,p + p\,q = 849$

et $25\,p + q\,[25\,\theta] = 830 < 849$, donc $i_o = 25$ par (A) et (B)

De même : $(a+1)\,p' - (b+1)\,q' + p'\,q' = 361$

et $15\,p' - q'\,[-15\,\theta] = 370 > 361$ donc $i'_o = 14$.

On a alors, suivant la proposition 2, la table des nombres 2-h. c. à partir de N :

(a, b) = (11000, 6940); (11008, 6935); (10989, 6947);

(11016, 6930); (10997, 6942); etc ...

Remarque - Pour les petites valeurs de a (a < 345) on peut dresser la table des nombres 2-h. c. par la programmation " sandwich " par exemple (cf. [6]).

§ 5

ESTIMATION de Q(X)

PROPOSITION 6 -

Soit Q(X) le nombre de nombres 2-h. c. ≤ X. On a :

i) $Q(X) \geq c(\log X)^{4/3}$

ii) $\liminf \frac{\log Q(X)}{\log \log X} = \frac{4}{3}$

iii) $\limsup \frac{\log Q(X)}{\log \log X} = 1 + \frac{1}{2\ell + 1}$

où $\ell = \limsup_k \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k}$

Démonstration -

Nous allons d'abord encadrer la fonction ϕ :

Lemme 2 - *On a :*

(21) $\phi(x) = \theta\, q\, q'(2x - q - q') \leq 0\, x^3$

et pour $2q_k + q_{k-1} \leq x < 2q_{k+1} + q_k$, *on a :*

(22) $\phi(x) \geq -\frac{\theta}{2} q_k x^2$

Démonstration du lemme -

La majoration (21) est évidente, compte tenu de q = p. g. d. p. ($[x]$), de q' = p. g. d. i. ($[x]$) et de (5).

Pour la minoration, considérons deux cas :

Premier cas, $2q_k + q_{k-1} \leq x < q_{k+1} + q_k$. On écrit alors :

$x = (r + \xi) q_k + q_{k-1}$ avec r entier et $0 \leq \xi < 1$.

On a alors :

$$\phi(x) = \theta\, q_k (x - \xi q_k)(2x - q_k - (x - \xi q_k)) \geq \theta\, q_k (x - q_k)\, x$$

et comme $\frac{x - q_k}{x} \geqslant 1 - \frac{q_k}{x} \geqslant \frac{1}{2}$, on obtient (22).

Deuxième cas, $q_{k+1} + q_k \leqslant x < 2\, q_{k+1} + q_k$. On écrit alors :

$$x = (1 + \xi)\, q_{k+1} + q_k \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \xi < 1$$

et $$\phi(x) = \theta\, q_{k+1}\, (q_{k+1} + q_k)(2\, x - q_{k+1} - q_{k+1} - q_k)$$

et comme $x \leqslant (2 + \xi)\, q_{k+1}$ et $x \leqslant (1 + \xi)(q_{k+1} + q_k)$, on a :

$$\phi(x) \geqslant \theta\, x^2\, q_k\, \frac{1 + 2\,\xi}{(2 + \xi)(1 + \xi)} \geqslant \frac{\theta}{2}\, x^2\, q_k$$

Pour étudier $Q(X)$ nous allons utiliser les nombres 2-h. c. s. c'est-à-dire les nombres $2^a\, 3^b$ vérifiant la formule (1). Les premiers nombres 2-h. c. s. sont : 2, 2.3, $2^2.3$, $2^3.3$, $2^3.3^2$, $2^4.3^2$, $2^5.3^2$, $2^6 3^2$, $2^6, 3^3$, etc ...

Pour chaque valeur de b, on choisit un nombre N_b, 2-h. c. s. de la forme $2^{a_b}\, 3^b$. Il est clair que la suite N_b vérifie $N_{b+1} \geqslant 3\, N_b$. La formule (1) entraîne que pour N assez grand, $a = \frac{b}{\theta} + O(1)$. Et le théorème 1 dit qu'entre N_b et $3\, N_b$ il y a $\mathcal{C}(N_b)$ nombres 2-h.c. avec $\left| \mathcal{C}(N_b) - \phi^{-1}(a + 1) \right| \leqslant 2$. Pour $b \geqslant b_o$, on aura donc :

$$\mathcal{C}(N_b) \geqslant \frac{(a + 1)^{1/3}}{\theta} - 2 \geqslant \lambda\, b^{1/3}$$

en majorant $\phi(x)$ par (21). On aura ensuite pour $b_1 > b_o$:

$$Q(N_{b_1}) - Q(N_{b_o}) \geqslant \sum_{b_o \leqslant b \leqslant b_1 - 1} \lambda\, b^{1/3} \geqslant \int_{b_o - 1}^{b_1 - 2} \lambda\, t^{1/3}\, dt .$$

Quand $X \to \infty$, soit N_{b_1} immédiatement inférieur à X, on a $b_1 \sim \frac{\log X}{2 \log 3}$ et on en déduit $Q(X) \geqslant c(\log X)^{4/3}$ ce qui démontre i).

Désignons maintenant par $N_i = 2^{a_i}\, 3^{b_i}$ la suite de tous les nombres 2-h. c. s. Le nombre des $N_i \leqslant X$ est $O(\log X)$. Remarquons maintenant que si θ est de type constant (c'est-à-dire si les coefficients a_i de son développement en fraction continue sont majorés), on a $q_{k+1} = O(q_k)$ et (22) et (23) entraînent $\phi(x) \geqslant c\, x^3$ pour une valeur de $c > 0$. On a encore $\phi(x) \geqslant c\, x^3$ si l'on choisit x tel que $2\, q_k + q_{k-1} \leqslant x < 3\, q_k + q_{k-1}$. Pour un tel x on considère un nombre 2-h. c. s. $X = 2^a\, 3^b$, avec $a + 1 = \phi(x)$, on a alors :

$$Q(X) \leq \sum_{N_i \leq X} \mathcal{C}(N_i) \leq \sum_{N_i \leq X} (\phi^{-1}(a_i + 1) + 2)$$

(23) $$Q(X) \leq \text{Card } \{N_i \leq X\} \ (\phi^{-1}(a + 1) + 2)$$

On obtient alors $Q(X) = O(\log X)^{4/3}$ ce qui avec i) donne ii.

Montrons maintenant iii). Soit $\ell = \limsup \frac{\log q_{k+1}}{\log q_k}$.

On a donc pour tout k, $q_{k+1} \leq c_\varepsilon (q_k)^{\ell+\varepsilon}$ et cela entraîne, par (22) $\phi(x) \geq c\, x^{2+1/(\ell+\varepsilon)}$. L'inégalité (23) donne alors :

$$Q(X) = O(\log X)^{1+1/(2+\frac{1}{\ell+\varepsilon})}$$

Réciproquement soit une sous-suite de valeurs de k telle que $\frac{\log q_{k+1}}{\log q_k}$ soit voisin de ℓ. Pour $\frac{1}{2} q_{k+1} < x < q_{k+1}$, on a :

$$\frac{\theta}{2} q_k x^2 < \phi(x) < \theta\, q_k x^2$$

On considère alors la famille $N_b = 2^{a_b} 3^b$ de nombres 2-h. c. s. ayant servi à la minoration de $Q(X)$, pour les valeurs de b vérifiant :

$$(\tfrac{1}{4} + \varepsilon)\, q_k q_{k+1}^2 < b < (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)\, q_k q_{k+1}^2$$

Par la formule (1), on a :

$$\phi(\tfrac{1}{2} q_{k+1}) < (\tfrac{1}{4} + \varepsilon)\, \theta\, q_k q_{k+1}^2 < a_b + 1 < (\tfrac{1}{2} - \varepsilon)\, \theta\, q_k q_{k+1}^2 < \phi(q_{k+1})$$

d'où il vient :

$$\frac{1}{2} q_{k+1} < x_a = \phi^{-1}(a_b + 1) < q_{k+1}$$

et par le théorème 2 :

$$\mathcal{C}(N_b) > \frac{1}{2} q_{k+1} - 2$$

En posant $X = \exp(q_k q_{k+1}^2)$, on a alors :

$$Q(X) \geq (\tfrac{1}{2} q_{k+1} - 2)\ (\tfrac{1}{4} - 2\varepsilon)\, q_k q_{k+1}^2$$

ce qui entraîne

$$\limsup \frac{\log Q(X)}{\log \log X} \geq 1 + \frac{\ell}{2\ell + 1} \ .$$

TABLES NUMERIQUES

x	$\phi(x)$	x	$\phi(x)$	Q	Q'
2	1,26	11	166,57	8	11
3	3,79	19	1054,91	8	19
4	11,36	27	2589,34	27	19
5	18,93	46	14888,68	46	19
6	37,86	65	35843,12	65	19
7	56,78	84	65452,65	65	84
8	75,71	149	513286,59	149	84
9	106,00	233	1839935,01	233	84
10	136,28	317	3914492,61	317	84
		401	6736959,39	401	84
		485	10307333,34	485	84
		569	14625620,47	485	569

REFERENCES

[1] *G. BESSI* — "Etude des nombres 2-hautement composés" Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux.- 1974-75, exposé n° 20

[2] *G.H. HARDY & E.M. WRIGHT* — "An introduction to the théory of numbers" 4th edition, Oxford at the Clarendon Press.- 1960.

[3] *KUYPPERS & NIEDERREITER* — "Uniform distribution of sequences" Interscience tracts.- John Wiley and Sons.- New-York, 1974.

[4] *S. LANG* — "Introduction to Diophantine approximations" (Addison-Wesley.- Reading, Massachussets.- 1966

[5] *J.L. NICOLAS* — "Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan".- Can. J. Maths, vol. XXIII, n° 1, 1971.- p.116-130.

[6] *J.L. NICOLAS* — "Algorithmes d'optimisation en nombres entiers" à paraître aux comptes rendus des journées S.M.F. de déc. 75 sur les algorithmes.

[7] *O. PERRON* — "Die Lehre von den Kettenbrüchen". New-York, Chelsea.

[8] [illegible] — "Highly composite numbers". Proc. London Math. Soc.- Ser. 2, 14, 1915.- p. 347-400.- Collected papers, p. [illegible].

[9] *N. SLATER* — "Gaps and steps for the sequence n θ mod. 1.- Proc. Camb. Phil. Soc.- 1967.- 63, p.1115-1123.

[10] *R. TIJDEMAN and H.G. MEIJER* — "On integers generated by a finite number of fixed primes".- Compositio Mathematica.- vol. 29, Fasc. 3, 1974; p. 273-286.

G. BESSI et J.L. NICOLAS

Département de Mathématiques
Université de LIMOGES
123, rue Albert Thomas

87100 - LIMOGES

Troisième Partie

UTILISATION des NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSES pour la RESOLUTION de CERTAINS PROBLEMES d'OPTIMISATION

par

Gérard BESSI

INTRODUCTION

La recherche des nombres 2-hautement composés revient à résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers (cf. [7]):

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leqslant C \\ \max (x + 1)(y + 1) \end{cases}$$

Toutes les propriétés obtenues dans [2] sur les nombres 2-hautement composés et les résultats sur la répartition des $n\theta$ modulo 1 (cf. [2], [3], [4], [10], [11]) permettent de résoudre en nombres entiers pour α et β réels positifs :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y \leqslant C \\ \max (x + 1)(y + 1) \end{cases}$$

Nous nous intéresserons à deux types de solutions (cf. [7]):

- d'une part, les solutions strictes qui correspondent aux nombres 2-hautement composés: un couple $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sera solution stricte si $\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\alpha x + \beta y \leqslant \alpha a + \beta b \Rightarrow (x + 1)(y + 1) < (a + 1)(b + 1)$
- d'autre part, les solutions larges qui correspondent aux nombres 2-largement composés: un couple $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sera solution large si $\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\alpha x + \beta y \leqslant \alpha a + \beta b \Rightarrow (x + 1)(y + 1) \leqslant (a + 1)(b + 1)$

Dans une première partie, nous choisirons $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ irrationnel positif et nous chercherons les conditions que doit vérifier un couple (a, b) pour être soit solution stricte, soit solution large.

Une deuxième partie reprendra cette étude dans le cas où $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ est rationnel positif.

Enfin, nous indiquerons une méthode de résolution de ce problème à partir d'exemples.

§ 1

RESOLUTION en NOMBRES ENTIERS

$$de\ I \begin{cases} \alpha x + \beta y \leqslant C \\ max\ (x+1)(y+1) \end{cases}$$

lorsque α *et* β *sont des réels positifs*

et $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$ *un nombre irrationnel*

---

1) *Solutions strictes* -

On dit que $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est solution stricte si :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \alpha x + \beta y \leqslant \alpha a + \beta b \Rightarrow (x+1)(y+1) < (a+1)(b+1)$$

Considérons le développement de θ en fraction continue et désignons par $\frac{p}{q}$ les convergents intermédiaires pairs de θ et par $\frac{p'}{q'}$ les convergents intermédiaires impairs de θ. Il en résulte, en écrivant que $(a-q, b+p)$ n'est pas solution de I pour $q < a$:

$$(a+1)\frac{p}{q} - p < b + 1 \qquad (1)$$

de même, pour $p' < b$:

$$b + 1 < (a+1)\frac{p'}{q'} + p' \qquad (2)$$

Pour étudier la variation de l'expression $(a+1)\frac{p}{q} - p$, utilisons le résultat ([2], § 1, formule 2) avec $p_k \leqslant p < p_{k+2}$.

Nous avons:

$$(a+1)\frac{p + p_{k+1}}{q + q_{k+1}} - p - p_{k+1} = (a+1)\frac{p}{q} - p + \frac{a+1}{q(q+q_{k+1})} - p_{k+1}$$

donc, pour $a + 1 \geqslant p_{k+1}\ q(q + q_{k+1})$ il vient :

$$(a+1)\,\frac{p+p_{k+1}}{q+q_{k+1}} - p - p_{k+1} \geq (a+1)\,\frac{p}{q} - p \qquad (3)$$

avec égalité pour $a+1 = p_{k+1}\,q(q+q_{k+1})$.

De même, pour $a+1 \geq p_{k+1}\,q'(q'+q_{k+1})$ nous avons:

$$(a+1)\,\frac{p'+p_{k+1}}{q'+q_{k+1}} + p' + p_{k+1} \leq (a+1)\,\frac{p'}{q'} + p' \qquad (4)$$

avec égalité pour $a+1 = p_{k+1}\,q'(q'+q_{k+1})$.

Les inégalités (3) et (4) nous amènent à considérer les suites constituées par les nombres de la forme $p_{k+1}\,q(q+q_{k+1})$ et $p_{k+1}\,q'(q'+q_{k+1})$.

Définitions -

Soient les suites $W = (W^i_{r_i})_{\substack{i\in\mathbb{N}\setminus 2\mathbb{N} \\ 1\leq r_i\leq a_i}}$ et $W' = (W^i_{r_i})_{\substack{i\in 2\mathbb{N} \\ 1\leq r_i\leq a_i}}$

telles que:

$$W^0 = p_0(q_1 - q_0)\,q_1$$

$$W^1_1 = p_1\,q_0(q_1+q_0) \;\ldots\ldots\ldots\; W^1_{a_1} = p_1(q_2 - q_1)\,q_2$$

$$W^2_1 = p_2\,q_1(q_2+q_1) \;\ldots\ldots\ldots\; W^2_{a_2} = p_2(q_3 - q_2)\,q_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$W^i_1 = p_i\,q_{i-1}(q_i+q_{i-1}) \;\ldots\ldots\; W^i_{a_i} = p_i(q_{i+1} - q_i)\,q_{i+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les fonctions v, u, u', v' sont définies de la façon suivante

Si $a \in \mathbb{N}$, on désigne par $W^i_{r_i}$ le plus grand nombre de la suite W ($i \in \mathbb{N} \setminus 2\,\mathbb{N}$) inférieur ou égal à $a+1$ et on pose:

$$v(a) = r_i\,q_i + q_{i-1} \quad \text{et} \quad u(a) = r_i\,p_i + p_{i-1}$$

De même, si $W^j_{r_j}$ est le plus grand nombre de la suite W' ($j \in 2\,\mathbb{N}$) inférieur ou égal à $a+1$, on pose :

$$v'(a) = r_j\,q_j + q_{j-1} \quad \text{et} \quad u'(a) = r_j\,p_j + p_{j-1}$$

D'après les inégalités (3) et (4) et les définitions, quels que soient les convergents p, q, p', q', nous avons :

$$(a+1)\frac{u(a)}{v(a)} - u(a) \geq (a+1)\frac{p}{q} - p \qquad (5)$$

et

$$(a+1)\frac{u'(a)}{v'(a)} + u'(a) \leq (a+1)\frac{p'}{q'} + p' \qquad (6)$$

Nous venons de montrer que, si (a, b) est une solution stricte, alors $(a+1)\frac{u(a)}{v(a)} - u(a) < b+1 < (a+1)\frac{u'(a)}{v'(a)} + v'(a)$. Etudions maintenant la proposition réciproque.

PROPOSITION 1 -

(a, b) solution stricte de I $\Leftrightarrow$

$$(a+1)\frac{u(a)}{v(a)} - u(a) < b+1 < (a+1)\frac{u'(a)}{v'(a)} + u'(a) \qquad (7)$$

Démonstration -

Remarquons d'abord, comme pour les nombres 2-hautement composés que (a, b) étant une solution stricte, on peut classer les solutions strictes comprises entre (a, b) et $(a, b+1)$ sous la forme M_i avec $-i'_o \leq i \leq i_o$, ces nombres étant ordonnés suivant les valeurs de $\{i\,\theta\}$ (Théorème 1, [2]), démontré quelle que soit la valeur de θ).

Soit (a, b) vérifiant l'inégalité (7). Alors il existe $N'_1 = (a', b')$, solution stricte telle que (a, b) soit compris entre (a', b') et $(a', b'+1)$. En effet, il suffit de remarquer que, si (c, d) est solution stricte, la solution stricte suivante est inférieure ou égale à $(c, d+1)$, puisqu'il existe une solution stricte inférieure à $(c, d+1)$ ou sinon $(c, d+1)$ est solution stricte ($(c+1)(d+2) > (c+1)(d+1)$).

(a, b) est de la forme $N'_i = (a' + i, b' - [i\,\theta])$ et sera solution stricte à condition que $-i'_o \leq i \leq i_o$. Cette condition devient d'après la proposition 3 ([2]), avec $q = p.g.d.p.(i_o + i'_o + 1)$ et $q' = p.g.d.i.(i_o + i'_o + 1)$;

$$i\,p + q\,[i\,\theta] < (b'+1)\,q - (a'+1)\,p + p\,q \qquad (8)$$

$$i\,p' - q'\,[-i\,\theta] < (a' + 1)\,p' - (b' + 1)\,q' + p'\,q' \qquad (9)$$

En remplaçant a' par $a - i$ et b' par $b + [i\,\theta]$, il vient :

$$0 < (b + 1)\,q - (a + 1)\,p + p\,q$$

et $$(b + 1)\,q - (a + 1)\,p - p\,q < 0$$

Ces inégalités sont satisfaites puisque (a, b) vérifie (7).

Application -

Soit à résoudre le problème d'optimisation en nombres entiers

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leqslant C \\ \max\ (x + 1)\ (y + 1) \end{cases}$$

On considère $\frac{p_k}{q_k}$ k-ème convergent dans le développement en fraction continue de $\theta = \frac{\log 2}{\log 3}$. Les valeurs de $\frac{p_k}{q_k}$, pour $k = 0, 1, \ldots$ sont :

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{5}{8};\ \frac{12}{19};\ \frac{41}{65};\ \frac{53}{84};\ \frac{306}{485};\ \frac{665}{1054};\ \frac{15\,601}{24\,727};\ \text{etc...}$$

Nous avons alors :

$W_1^1 = p_1\,q_o(q_o + q_1) = 2$ $\qquad$ $W^o = p_o(q_1 - q_o)\,q_1 = 0$

$W_1^3 = p_3\,q_2(q_2 + q_3) = 20$ $\qquad$ $W_1^2 = p_2\,q_1(q_1 + q_2) = 3$

$W_2^3 = p_3(q_2 + q_3)\,q_4 = 80$ $\qquad$ $W_1^4 = p_4\,q_3(q_3 + q_4) = 165$

$W_1^5 = p_5\,q_4(q_4 + q_5) = 2592$ $\qquad$ $W_2^4 = p_4(q_3 + q_4)\,q_5 = 1045$

$W_2^5 = p_5(q_4 + q_5)(2\,q_5 + q_4) = 14904$ $\qquad$ $W_1^6 = p_6\,q_5\,q_6 = 65\,436$

$W_3^5 = p_5(2\,q_5 + q_4)\,q_6 = 35\,880$ $\qquad$ $W_1^8 = p_8\,q_7(q_7 + q_8) = 14625576$

$W_1^7 = p_7\,q_6(q_6 + q_7) = 513\,305$ $\qquad$ . . . . . .

$W_2^7 = p_7(q_6 + q_7)(2\,q_7 + q_6) = 1840001$

$W_3^7 = p_7(2\,q_7 + q_6)(3\,q_7 + q_6) = 3914633$

$W_4^7 = p_7(3\,q_7 + q_6)(4\,q_7 + q_6) = 6737201$

. . . . . .

Les solutions correspondent aux nombres 2-hautement composés et le nombre $2^a\,3^b$ sera 2-hautement composé s'il vérifie les conditions suivantes :

$0 \leq a+1 \leq 2$ $\qquad 0 < b+1 < a+1+1$

$2 \leq a+1 \leq 3$ $\qquad \frac{1}{2}(a+1) - 1 < b+1 < a+1+1$

$3 \leq a+1 \leq 20$ $\qquad \frac{1}{2}(a+1) - 1 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2$

$20 \leq a+1 \leq 80$ $\qquad \frac{3}{5}(a+1) - 3 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2$

$80 \leq a+1 \leq 165$ $\qquad \frac{5}{8}(a+1) - 5 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2$

$165 \leq a+1 \leq 1045$ $\qquad \frac{5}{8}(a+1) - 5 < b+1 < \frac{7}{11}(a+1) + 7$

$1045 \leq a+1 \leq 2592$ $\qquad \frac{5}{8}(a+1) - 5 < b+1 < \frac{12}{19}(a+1) + 12$

$2592 \leq a+1 \leq 14904$ $\qquad \frac{17}{27}(a+1) - 17 < b+1 < \frac{12}{19}(a+1) + 12$

$14904 \leq a+1 \leq 35880$ $\qquad \frac{29}{46}(a+1) - 29 < b+1 < \frac{12}{19}(a+1) + 12$

$35880 \leq a+1 \leq 65436$ $\qquad \frac{41}{65}(a+1) - 41 < b+1 < \frac{12}{19}(a+1) + 12$

$65436 \leq a+1 \leq 513305$ $\qquad \frac{41}{65}(a+1) - 41 < b+1 < \frac{53}{84}(a+1) + 53$

$513305 \leq a+1 \leq 1840001$ $\qquad \frac{94}{149}(a+1) - 149 < b+1 < \frac{53}{84}(a+1) + 53$

. . . . . .

Remarque -

Nous avons obtenu ces résultats en privilégiant la variable a, mais une étude analogue peut être faite en considérant b et en définissant la suite :

$V_1^1 = q_1 p_0 (p_0 + p_1) = 0$ $\qquad V_1^2 = q_2 (p_1 - p_0) p_1 = 1$

$V_1^3 = q_3 p_2 (p_2 + p_3) = 9$ $\qquad V_1^2 = q_2 p_1 (p_1 + p_2) = 4$

$V_2^3 = q_3 (p_2 + p_3) p_4 = 45$ $\qquad V_1^4 = q_4 p_3 (p_3 + p_4) = 112$

$V_1^5 = q_5 p_4 (p_4 + p_5) = 1615$ $\qquad V_2^4 = q_4 (p_3 + p_4) p_5 = 672$

$V_2^5 = q_5 (p_4 + p_5) (2 p_5 + p_4) = 9367$ $\qquad V_1^6 = q_6 p_5 (p_5 + p_6) = 41340$

$V_3^5 = q_5 (2 p_5 + p_4) p_6 = 22591$

$V_1^7 = q_7 p_6 (p_6 + p_7) = 323736$

. . . . . .

et nous avons alors les conditions :

$0 \leqslant b+1 \leqslant 1$ $\quad (b+1)-1 < a+1$

$1 \leqslant b+1 \leqslant 4$ $\quad (b+1)-1 < a+1 < 2(b+1)+2$

$4 \leqslant b+1 \leqslant 9$ $\quad \frac{3}{2}(b+1)-3 < a+1 < 2(b+1)+2$

$9 \leqslant b+1 \leqslant 45$ $\quad \frac{3}{2}(b+1)-3 < a+1 < \frac{5}{3}(b+1)+5$

$45 \leqslant b+1 \leqslant 112$ $\quad \frac{3}{2}(b+1)-3 < a+1 < \frac{8}{5}(b+1)+8$

$112 \leqslant b+1 \leqslant 672$ $\quad \frac{11}{7}(b+1)-11 < a+1 < \frac{8}{5}(b+1)+8$

$672 \leqslant b+1 \leqslant 1615$ $\quad \frac{19}{12}(b+1)-19 < a+1 < \frac{8}{5}(b+1)+8$

$1615 \leqslant b+1 \leqslant 9367$ $\quad \frac{19}{12}(b+1)-19 < a+1 < \frac{27}{17}(b+1)+27$

$9367 \leqslant b+1 \leqslant 22591$ $\quad \frac{19}{12}(b+1)-19 < a+1 < \frac{46}{29}(b+1)+46$

. . . . . .

2) *Solutions larges* -

On appelle solution large* toute solution large de I qui n'est pa solution stricte. De la proposition 1 on peut déduire le corollaire suivant

COROLLAIRE 1 -

(a, b) solution large de I $\iff$

$$(a+1)\frac{u(a)}{v(a)} - u(a) \leqslant b+1 \leqslant (a+1)\frac{u'(a)}{v'(a)} + u'(a)$$

L'ensemble des solutions larges* est constitué de l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $(a+1)\frac{u(a)}{v(a)} - u(a) = b+1$ (10), solutions larges* paires, et de l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $(a+1)\frac{u'(a)}{v'(a)} + u'(a) = b+1$ (11), solutions larges* impaires.

On remarque que lorsque

$$a+1 = W^i_{r_i} = p_i((r_i-1)q_i + q_{i-1})(r_i q_i + q_{i-1})$$

et en prenant

$$b+1 = V^i_{r_i} = q_i((r_i-1)p_i + p_{i-1})(r_i p_i + p_{i-1}),$$

(a, b) est une solution large*. On l'appellera solution large* supérieure.

A partir des solutions larges* supérieures paires, on obtient toutes les solutions larges* paires d'après (10). De même d'après (11), on obtiendra toutes les solutions larges* impaires à partir des solutions larges* supérieures impaires.

Application -

Recherche des solutions larges* de $\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leq C \\ \max (x+1)\ (y+1) \end{cases}$

Les solutions larges* supérieures paires sont (cf. corollaire 1) :

(a, b) tels que

$(a+1, b+1) \in \{(2, 0); (20, 9); (80, 45); (2592, 1615); \ldots\}$

De même, on a les solutions larges* supérieures impaires :

(a, b) tels que

$(a+1, b+1) \in \{(3, 4); (165, 112); (1045, 672); (65436, 41430) \ldots$

Solutions larges paires :*

(a, b) tels que $(a+1, b+1) = (2(r+1), r)$ $\quad 0 \leq r < 9$

$(a+1, b+1) = (20 + 5r, 9 + 3r)$ $\quad 0 \leq r < 12$

$(a+1, b+1) = (80 + 8r, 45 + 5r)$ $\quad 0 \leq r < 314$

$(a+1, b+1) = (2592 + 27r, 1615 + 17r)$ $\quad 0 \leq r < 456$

$(a+1, b+1) = (14904 + 46r, 9367 + 29r)$ $\quad 0 \leq r < 456$

. . . . . .

On peut remarquer que: $12 = 2\, p_3\, q_3$, $456 = 2\, p_5\, q_5$

Solutions larges impaires :*

(a, b) tels que $(a+1, b+1) = (3(r+1), 2(r+2))$ $\quad 0 \leq r < 54$

$(a+1, b+1) = (165 + 11r, 112 + 7r)$ $\quad 0 \leq r < 89$

$(a+1, b+1) = (1045 + 19r, 672 + 12r)$ $\quad 0 \leq r < 3389$

. . . . . .

On peut remarquer que: $88 = 2\, p_4\, q_4$.

§ 2

RESOLUTION en NOMBRES ENTIERS

de I $\begin{cases} \alpha x + \beta y \leq C \\ max\ (x+1)\ (y+1) \end{cases}$

dans le cas où $\theta = \frac{\alpha}{\beta}$

est un nombre rationnel positif

On considère le développement en fraction continue de θ et l'on pose $\theta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_k}{q_k}$.

Dans cette étude, on devra tenir compte de la parité de k.

Premier cas : k est pair -

Une solution stricte (a, b) de I vérifiera les inégalités (1) et (2). Dans le cas de ce problème, puisque M_{-q_k} n'est pas solution stricte de I, il apparaît une condition supplémentaire :

$$b + 1 < (a + 1) \frac{p_k}{q_k} + p_k \qquad (12)$$

En reprenant l'étude de la variation de l'expression $(a + 1) \frac{p'}{q'} + p'$, nous obtenons :

$$(a + 1) \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} + p_{k-1} \geq (a + 1) \frac{p_k}{q_k} + p_k$$

pour $(a + 1) \geq (p_k - p_{k-1})\ q_k\ q_{k-1}$.

Ce résultat, ainsi que ceux du paragraphe précédent permettent, pour une valeur de a donnée, de dégager la condition dominante :

Pour $a + 1 \leq (p_k - p_{k-1})\ q_k\ q_{k-1}$ cette condition dominante est

$$(a + 1) \frac{u(a)}{v(a)} - u(a) < b + 1 < (a + 1) \frac{u'(a)}{v'(a)} + u'(a)$$

Pour $(p_k - p_{k-1})\ q_k\ q_{k-1} \leq a + 1 \leq p_{k-1}\ (q_k - q_{k-1})\ q_k$ cette condition dominante est:

$$(a + 1) \frac{p_k - p_{k-1}}{q_k - q_{k-1}} - p_k + p_{k-1} < b + 1 < (a + 1) \frac{p_k}{q_k} + p_k$$

Pour $a + 1 \geq p_{k-1} (q_k - q_{k-1}) q_k$ cette condition dominante est:

$$(a + 1) \frac{p_k}{q_k} - p_k < b + 1 < (a + 1) \frac{p_k}{q_k} + p_k$$

Deuxième cas : k est impair -

En procédant de même, on trouve la condition supplémentaire :

$$(a + 1) \frac{p_k}{q_k} - p_k < b + 1 \qquad (13)$$

et on obtient des conditions dominantes analogues.

Ces résultats démontrent les conditions nécessaires $i) \Rightarrow ii)$ de la proposition suivante :

PROPOSITION 2 - $i)$ (a, b) *solution stricte* $\Longleftrightarrow$ $ii)$

$ii)$ {

Pour k pair -

- *si* $a + 1 \leq (p_k - p_{k-1}) q_k q_{k-1}$ *alors*

$$(a + 1) \frac{u(a)}{v(a)} - u(a) < b + 1 < (a + 1) \frac{u'(a)}{v'(a)} + u'($$

- *si* $(p_k - p_{k-1}) q_k q_{k-1} \leq a + 1 \leq p_{k-1}(q_k - q_{k-1}) q_k$

alors

$$(a + 1) \frac{p_k - p_{k-1}}{q_k - q_{k-1}} - p_k + p_{k-1} < b + 1 < (a+1) \frac{p_k}{q_k} + p_k$$

- *si* $a + 1 \geq p_{k-1}(q_k - q_{k-1}) q_k$ *alors*

$$(a + 1) \frac{p_k}{q_k} - p_k < b + 1 < (a + 1) \frac{p_k}{q_k} + p_k$$

Pour k impair

- *si* $a + 1 \leq (p_k - p_{k-1}) q_k q_{k-1}$ *alors*

$$(a + 1) \frac{u(a)}{v(a)} - u(a) < b + 1 < (a + 1) \frac{u'(a)}{v'(a)} + u'($$

- *si* $a + 1 \geq (p_k - p_{k-1}) q_k q_{k-1}$ *alors*

$$(a + 1) \frac{p_k}{q_k} - p_k < b + 1 < (a + 1) \frac{p_k}{q_k} + p_k$$

Démonstration -

Réciproquement, pour un couple (a, b) vérifiant les conditions ii), on reprend les notations de la proposition 1, et on remarque que, dans ce cas particulier, $i_o + i'_o + 1 \leq q_k$.

Si $i_o + i'_o + 1 < q_k$ il est évident (proposition 1) que ii) $\Rightarrow$ i).

Si $i_o + i'_o + 1 = q_k$ (a, b) vérifiant ii), alors (a, b) satisfait aux conditions (12) et (13) qui sont équivalentes à (a, b) solution stricte.

§ 3

APPLICATIONS

1) Soit à résoudre en nombres entiers

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq C \\ \max\,(x+1)\,(y+1) \end{cases}$$

Solutions strictes - (a, b) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

$$\left.\begin{array}{ll} 3 \leq a+1 \leq 6 & \frac{1}{2}(a+1) - 1 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2 \\ 6 \leq a+1 & \frac{2}{3}(a+1) - 2 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2 \end{array}\right\} \quad (14)$$

*Solutions larges** - (a, b) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que

1) $a + 1 = 4, \quad b + 1 = 1$

2) $r \geq 2 \qquad a + 1 = 3r \qquad b + 1 = 2r - 2 \qquad$ (paires)

$\qquad\qquad a + 1 = 3r \qquad b + 1 = 2r + 2 \qquad$ (impaires)

Régime permanent -

A cause des inégalités (14), nous étudierons les solutions particulières appelées solutions supérieures strictes telles que $b + 1 = \frac{2}{3}(a + 1)$ avec $a + 1 \geq 6$, solutions que nous pouvons définir à l'aide du paramètre m par : $a + 1 = 3m$ et $b + 1 = 2m$ avec $m \geq 3$.

En posant $C_m = 2 \times (3\,m - 1) + 3 \times (2\,m - 1) = 12\,m - 5$, il est évident que les problèmes

$$\begin{cases} 2x + 3y = C_m \\ \max\,(x+1)\,(y+1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x + 3y \leqslant C_m \\ \max\,(x+1)\,(y+1) \end{cases}$$

admettent la même solution $(3\,m - 1\ ,\ 2\,m - 1)$.

A partir de ces solutions, il est possible d'obtenir toutes les autres solutions du problème lorsque $C \geqslant 19$.

On construit le même tableau que dans le chapitre 5 de [1] en remarquant que pour toute solution, la solution suivante est soit M_{-1} soit M_2 ; lorsque M_{-1} et M_2 sont solutions larges*, on prendra M_1.

$C_m = 12\,m - 5$	$(3\,m - 1,\ 2\,m - 1)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 1$	$i'_o = 1$
$C_m + 1 = 12\,m - 4$	$(3\,m - 2,\ 2\,m)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 2$	$i'_o = 0$
$C_m + 2 = 12\,m - 3$	$(3\,m,\ 2\,m - 1)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 1$	$i'_o = 1$
$C_m + 3 = 12\,m - 2$	$(3\,m - 1,\ 2\,m)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 2$	$i'_o = 0$
$C_m + 4 = 12 = -1$	$(3\,m + 1,\ 2\,m - 1)$	$i_o + i'_o + 1 = 2$	$i_o = 0$	$i'_o = 1$
$C_m + 5 = 12\,m$	$(3\,m,\ 2\,m)$	$i_o + i'_o + 1 = 2$	$i_o = 1$	$i'_o = 0$

$C_m + 6 = 12\,m + 1$ solutions larges* $\begin{cases} (3\,m + 2,\ 2\,m - 1) \\ (3\,m - 1,\ 2\,m + 1) \end{cases}$

$C_m + 7 = 12\,m + 2$	$(3\,m + 1,\ 2\,m)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 1$	$i'_o = 1$
$C_m + 8 = 12\,m + 3$	$(3\,m,\ 2\,m + 1)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 2$	$i'_o = 0$
$C_m + 9 = 12\,m + 4$	$(3\,m + 2,\ 2\,m)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 1$	$i'_o = 1$
$C_m + 10 = 12\,m + 5$	$(3\,m + 1,\ 2\,m + 1)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 2$	$i'_o = 0$
$C_m + 11 = 12\,m + 6$	$(3\,m + 3,\ 2\,m)$	$i_o + i'_o + 1 = 3$	$i_o = 0$	$i'_o = 2$

2) Résolution en nombres entiers de

$$\begin{cases} 5x + 8y \leqslant C \\ \max\,(x+1)\,(y+1) \end{cases}$$

Solutions strictes - (a, b) tels que

$$\left.\begin{array}{ll} 3 \leqslant a+1 \leqslant 20 & \frac{1}{2}(a+1) - 1 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2 \\ 20 \leqslant a+1 \leqslant 72 & \frac{3}{5}(a+1) - 3 < b+1 < \frac{2}{3}(a+1) + 2 \\ 72 \leqslant a+1 \leqslant 80 & \frac{3}{5}(a+1) - 3 < b+1 < \frac{5}{8}(a+1) + 5 \\ 80 \leqslant a+1 & \frac{5}{8}(a+1) - 5 < b+1 < \frac{5}{8}(a+1) + 5 \end{array}\right\} \quad (15)$$

*Solutions larges** - (a, b) tels que (a + 1, b + 1) soit de la forme:

$$\left.\begin{array}{ll} (2(r+1), r) & 0 \leqslant r < 9 \\ (20 + 5r, 9 + 3r) & 0 \leqslant r < 12 \\ (80 + 8r, 45 + 5r) & 0 \leqslant r \end{array}\right\} \text{ solutions paires}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3(r+1), 2(r+2)) & 0 \leqslant r < 23 \\ (72 + 8r, 50 + 5r) & 0 \leqslant r \end{array}\right\} \text{ solutions impaires}$$

Régime permanent -

Par la même démarche que pour l'application 1), on considèrera les solutions supérieures strictes suivantes :

(a, b) tels que $a + 1 = 8m$, $b + 1 = 5m$ et $m \geqslant 10$ avec $C_a = 80m - 13$.

A partir de ces solutions, on peut obtenir toutes les autres solutions du problème lorsque $C \geqslant 787$.

Pour cela, on est amené à chercher la solution stricte suivante d'une solution stricte donnée $M = (a, b)$ avec $a + 1 \geqslant 80$. On sait qu'elle sera de la forme M_i avec $-i'_o \leqslant i \leqslant i_o$. Par application, dans ce cas particulier, de la proposition 3 ([2], § 3) et en tenant compte de $[i\,\theta] = \left[i\,\frac{5}{8}\right]$ pour $-8 < i \leqslant 8$, on détermine i_o et i'_o par :

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{5}{8} i_o + \left[i_o \frac{5}{8}\right] < b + 1 - (a+1)\frac{5}{8} + 5 \leqslant \frac{5}{8}(i_o + 1) + \left[(i_o + 1)\frac{5}{8}\right] \\ \frac{5}{8} i'_o - \left[-i'_o \frac{5}{8}\right] < (a+1)\frac{5}{8} - (b+1) + 5 \leqslant \frac{5}{8}(i'_o + 1) - \left[-(i'_o + 1)\frac{5}{8}\right] \end{cases}$$

Ces inégalités montrent que i_o et i'_o sont strictement inférieurs à 8 et que $i_o + i'_o + 1$ prend les valeurs 7 ou 8;

lorsque $i_o + i'_o + 1 = 7$, les solutions M_{i_o+1} et $M_{-i'_o-1}$ sont toutes les deux larges*. On en déduit que M_i est soit $M_3 = (a-3, b+2)$, soit $M_5 = (a+5, b-3)$ et lorsque les deux solutions sont larges*, il faut prendre M_2.

Si l'on considère la fonction $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$(a, b) \mapsto 5a + 8b$$

alors $C(M_{-3}) - C(M) = C(M_5) - C(M) = 1$. En particulier, lorsque $C(M)$ sera de la forme $827 + 80r$, on obtiendra deux solutions larges* (a, b), telles que $(a+1, b+1) = (88 + 8r, 50 + 5r)$ et $(a+1, b+1) = (80 + 8r, 55 +$

Exemple -

Cherchons la solution en nombres entiers de

$$\begin{cases} 5x + 8y \leqslant 910 \\ \max\ (x+1)\ (y+1) \end{cases}$$

910 n'étant pas de la forme $827 + 80r$, la solution de ce problème n'est pas large*.

Les résultats du régime permanent peuvent être appliqués et comme la solution supérieure précédente est $(a, b) = (87, 54)$ avec $C = 867$, il faudra prendre la $43^{ème}$ solution après $(87, 54)$. Etant donné qu'il n'y a pas de solution large* antérieure, la $43^{ème}$ solution est de la forme $(87 - 3n_1 + 5n_2,\ 54 + 2n_1 - 3n_2)$ avec $n_1 + n_2 = 43$. En écrivant qu'elle vérifie les conditions (15), on obtient $n_1 = 26$ et $n_2 = 17$ et la solution cherchée sera $(94, 55)$.

3) Résolution en nombres entiers de

$$\begin{cases} 7x + 65y \leqslant C \\ \max\ (x+1)\ (y+1) \end{cases}$$

Considérons le développement en fraction continue suivant :

$$\frac{7}{65} = 0 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

Ainsi, les différentes valeurs des convergents principaux sont :

$$\frac{0}{1}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{3}{28}\ ,\ \frac{7}{65}\ .$$

Nous définissons (cf. Propositions 1 et 2)

$W_1^1 = p_1\ q_o\ (q_1 + q_o) = 10$ $\qquad$ $W^o = 0$

$W_2^1 = p_1\ (q_o + q_1)\ (2\ q_1 + q_o) = 190$ $\qquad$ $W_1^2 = p_2\ q_1\ (q_1 + q_2) = 999$

$W_3^1 = p_1\ (2\ q_1 + q_o)\ q_2 = 532$ $\qquad$ $W_2^2 = p_2\ (q_1 + q_2)\ (2\ q_2 + q_1) = 7215$

et $(p_3 - p_2)\ q_3\ q_2 = 7280$. Nous obtenons alors :

Solutions strictes -

(a, b) sera solution stricte si a et b vérifient les conditions :

$$\left.\begin{array}{ll|l}
0 \leqslant a+1 \leqslant 10 & -1 < b+1 < \frac{a+1}{9} + 1 & 999 \leqslant a+1 \leqslant 7280 \\
10 \leqslant a+1 \leqslant 190 & \frac{a+1}{10} - 1 < b+1 < \frac{a+1}{9} + 1 & \frac{3}{28}(a+1) - 3 < b+1 < \frac{7}{65}(a+1) + 7 \\
190 \leqslant a+1 \leqslant 532 & \frac{2}{19}(a+1) - 2 < b+1 < \frac{a+1}{9} + 1 & a+1 \geqslant 7280 \\
532 \leqslant a+1 \leqslant 999 & \frac{3}{28}(a+1) - 3 < b+1 < \frac{7}{65}(a+1) + 7 & \frac{7}{65}(a+1) - 7 < b+1 < \frac{7}{65}(a+1) + 7
\end{array}\right\} \quad (17)$$

Solutions larges - (cf. Corollaire 1)

(a, b) tels que (a + 1, b + 1) soit de la forme :

$$\left.\begin{array}{ll}
(10 + 10\,r,\ r) & 0 \leqslant r < 18 \\
(190 + 19\,r,\ 18 + 2\,r) & 0 \leqslant r < 18 \\
(532 + 28\,r,\ 54 + 3\,r) & 0 \leqslant r < 241 \\
(7280 + 65\,r,\ 777 + 7\,r) & 0 \leqslant r
\end{array}\right\} \text{ solutions paires}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(9\,r,\ r + 1) & 0 \leqslant r < 111 \\
(999 + 37\,r,\ 112 + 4\,r) & 0 \leqslant r < 168 \\
(7215 + 65\,r,\ 784 + 7\,r) & 0 \leqslant r
\end{array}\right\} \text{ solutions impaires}$$

Régime permanent -

Comme pour les applications 1) et 2), les solutions strictes supérieures sont de la forme (a, b) avec $a + 1 = 65\ m$ et $b + 1 = 7\ m$ pour $m \geqslant 112$ et permettent d'obtenir toutes les autres solutions pour $C \geqslant 101\ 848$ (en effet $C_m = 910\ m - 72$).

En adaptant les relations (16) à ce cas, on montre que la solution suivante d'une solution stricte M sera soit M_{-37}, soit M_{28} et lorsque ces deux solutions sont larges*, il faudra prendre M_{-9}. De même, lorsque C(M) sera de la forme 102 303 + 910 r, on obtiendra deux solutions larges* (a, b) telles que:

$$(a + 1, b + 1) = (7345 + 65\,r, 784 + 7\,r)$$

et

$$(a + 1, b + 1) = (7280 + 65\,r, 791 + 7\,r)$$

Exemple :
Recherche de la solution de $\begin{cases} 7x + 65y \leq 10^6 \\ max\ (x + 1)\ (y + 1) \end{cases}$

La solution supérieure stricte précédente est (a, b) = (71369, 7685) avec C(a, b) = 999 108. Entre 999 108 et 10^6, on trouve deux solutions larges* pour C = 999 563. Dans ce cas, il faut prendre la 891ème solution stricte après (71 369, 7685), donc de la forme:

$$(71\,369 - 37\,n_1 + 28\,n_2 - 9,\ 7685 + 4\,n_1 - 3\,n_2 + 1)$$

avec $n_1 + n_2 + 1 = 891$.

En utilisant les conditions (17), on obtient $n_1 = 382$ et $n_2 = 508$. La solution sera (71 450, 7690).

4) Comparaison des solutions des problèmes

$$I \begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leq C \\ max\ (x + 1)\ (y + 1) \end{cases} \qquad I_k \begin{cases} x\,p_k + y\,q_k \leq C \\ max\ (x + 1)\ (y + 1) \end{cases}$$

lorsque $\frac{p_k}{q_k}$ désignent les convergents principaux du développement en fraction continue de $\theta = \frac{\log 2}{\log 3}$

J.L. NICOLAS a montré ([7], programmation sandwich) que, si les solutions strictes (resp. larges*) des problèmes I_k et I_{k+1} coïncident jusqu'à un certain rang, il en est de même pour la table des solutions strictes (resp. larges*) du problème I. Cette méthode permet d'obtenir une table de solutions de I aussi longue que l'on veut.

Si l'on applique maintenant les résultats des propositions 1 et 2:

Premier cas : q_k est un convergent pair.

Les tables de solutions larges* coïncident jusqu'à (a, b) tel que

$$(a + 1, b + 1) = ((p_k - p_{k-1})\, q_k\, q_{k-1} + q_{k-1},\ (p_k - p_{k-1})\, q_k\, p_{k-1} + 2p_k$$

solution large* de I, mais pas de I_k .

Les tables de solutions strictes coïncident jusqu'à (a, b) tel que .

$$(a + 1, b + 1) = ((p_k - p_{k-1})\, q_k\, q_{k-1} + q_k,\ p_k\, p_{k-1}(q_k - q_{k-1}) + p_k)$$

solution stricte de I, mais pas de I_k .

Deuxième cas: q_k est un convergent impair.

Les tables de solutions larges* coïncident jusqu'à (a, b) tel que

$$(a + 1, b + 1) = ((p_k - p_{k-1})\, q_k\, q_{k-1} + q_{k-1},\ (p_k - p_{k-1})\, q_k\, p_{k-1})$$

solution large* de I, mais pas de I_k .

Les tables de solutions strictes coïncident jusqu'à (a, b)

$$(a + 1, b + 1) = ((p_k - p_{k-1})\, q_k\, q_{k-1} + q_k,\ (p_k - p_{k-1})q_k\, p_{k-1} + p_k - p$$

solution stricte de I, mais pas de I_k .

Exemples -

Pour chacun d'eux, nous indiquerons (ǰ) la première solution large* de I non solution large* de I_k et (ǰǰ) la première solution stricte de I, non solution stricte de I_k .

1) $\begin{cases} 2x + 3y \leq C & \text{ǰ)}\ (a, b) = (7, 2) \\ \max (x + 1)(y + 1) & \text{ǰǰ)}\ (a, b) = (8, 3) \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 8y \leq C & \text{ǰ)}\ (a, b) = (74, 51) \\ \max (x + 1)(y + 1) & \text{ǰǰ)}\ (a, b) = (79, 54) \end{cases}$

3) $\begin{cases} 41x + 65y \leq C & \text{ǰ)}\ (a, b) = (35833, 22643) \\ \max (x + 1)(y + 1) & \text{ǰǰ)}\ (a, b) = (35879, 22672) \end{cases}$

5) Résoudre en nombres entiers

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leqslant 10^6 \\ \max\ (x+1)\ (y+1) \end{cases}$$

La solution réelle de ce problème est (x^*, y^*) telle que :

$$x^* + 1 = \frac{10^6 + \log 2 + \log 3}{2 \log 2} \qquad y^* + 1 = \frac{10^6 + \log 2 + \log 3}{2 \log 3}$$

En prenant les parties entières $a = 721\,347$ et $b = 455\,119$, il est évident que le nombre $2^a\ 3^b$ est 2-hautement composé et de plus, $a \log 2 + b \log 3 \leqslant 10^6 < a \log 2 + (b+2) \log 3$. Comme dans ce cas particulier, $10^6 < a \log 2 + (b+1) \log 3$, alors

$$M = 2^{721347}\ 3^{455119}$$

est tel que $\log M \leqslant 10^6 < \log 3\ M$.

La solution en nombres entiers cherchée sera de la forme M_i avec $-i'_o \leqslant i \leqslant i_o$. Pour trouver i_o, on écrira (cf. (16)), compte tenu de $a + 1 \geqslant 513\,305$, que i_o est le plus grand entier positif i tel que :

$$\frac{94}{149}\, i + \left[\frac{94}{149}\, i\right] < 455\,120 - \frac{94}{149}\,(721\,348) + 9$$

d'où l'on déduit $\underline{i_o = 107}$.

De même, pour trouver i'_o, on écrit que i'_o est le plus grand entier i positif tel que

$$\frac{53}{84}\, i - \left[-\frac{53}{84}\, i\right] < \frac{53}{84}\,(721\,348) - 455\,120 + 53$$

et $\underline{i'_o = 54}$.

Il reste à chercher M_i avec $-54 \leqslant i \leqslant 107$ et $\log M_i \leqslant 10^6$; cette dernière inégalité équivaut à $\{i\,\theta\} \leqslant \frac{10^6 - \log M}{\log 3} \simeq 0{,}94167$.

On notera M_{n_i} le $i^{\text{ème}}$ nombre 2-hautement composé après M. D'après (2) (proposition 2), comme $i_o + i'_o = 161$, p.g.d.p. $(i_o + i'_o) = 149$ et p.g.d.i. $(i_o + i'_o) = 84$, les différences $n_{i+1} - n_i$ ne peuvent prendre que l'une des trois valeurs : 149, -84, 65. Il en résulte que les expressions $\frac{\log M_{n_{i+1}} - \log M_{n_i}}{\log 3}$ auxquelles on rajoutera $\frac{\log 3M - \log M_{n_{161}}}{\log 3}$ ne pourr

prendre que l'une des valeurs :

$\{149\ \theta\} \simeq 0{,}00853328$ .. (valeur obtenue 13 fois; probabilité de cette valeur 0,08)

$\{-84\ \theta\} \simeq 0{,}0019007$ ... (valeur obtenue 78 fois; probabilité de cette valeur 0,48)

$\{65\ \theta\} \simeq \{149\ \theta\} + \{-84\ \theta\} \simeq 0{,}010433$.
(valeur obtenue 71 fois; probabilité de cette valeur 0,44)

La valeur moyenne de $\dfrac{\log M_{n_{i+1}} - \log M_{n_i}}{\log 3}$ est $\dfrac{1}{161} \simeq 0{,}00621$

En supposnat que les valeurs de $\{n\ \theta\}$ sont bien distribuées, on sera amené à considérer le nombre $M_{n_{151}}$ puisque

$$151 \leqslant \frac{0{,}94167}{0{,}00621} < 152$$

donc $n_{151} = 149\ m_1 - 84\ m_2 + 65\ m_3$ avec

$m_1 \simeq 151 \times 0{,}08$ $\quad (m_1 = 12)$

$m_2 \simeq 151 \times 0{,}48$ $\quad (m_2 = 72$ ou $73)$

$m_3 \simeq 151 \times 0{,}44$ $\quad (m_3 = 66$ ou $67)$

on est conduit à envisager les nombres M_{-54} et M_{95} car

$12 \times 149 - 73 \times 84 + 66 \times 65 = -54$

et $12 \times 149 - 72 \times 84 + 67 \times 65 = 95$

or $\log M_{95} < 10^6$, et le nombre suivant M_{11} vérifie aussi $\log M_{11} < 10^6$ tandis que $\log M_{76} > 10^6$.

Donc la solution est $M_{11} = (721\ 358,\ 455\ 113)$

REFERENCES

(1) *G. BESSI* — "Etude des nombres 2-hautement composés." Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux.- (1974-75.- Exposé n° 20)

(2) *G. BESSI & J.L. NICOLAS* "Nombres 2-hautement composés." (cf. 2ème partie).

(3) *G.H. HARDY & E.M. WRIGHT* "An introduction to the theory of numbers." 4th edition, Oxford at the Clarendon Press.- (1960)

(4) *KUYPPERS & NIEDERREITER* "Uniform distribution of sequences." Interscience tracts.- John Wiley and Sons.- New-York.- (1974).

(5) *S. LANG* "Introduction to Diophantine approximations." Addison-Wesley.-Reading.- Massachussets.- (1966)

(6) *J.L. NICOLAS* "Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan."- Can. J. Maths.- vol. XXIII, n° 1.- (1971).- p. 116-130.

(7) *J.L. NICOLAS* "Algorithmes d'optimisation en nombres entiers." à paraître aux comptes rendus des journées S.M.F. de Déc. 1975, sur les algorithmes.

(8) *O. PERRON* "Die Lehre von den Kettenbrüchen." New-York, Chelsea.

(9) *S. RAMANUJAN* "Highly composite numbers." Proc. London Math. Soc.- Ser. 2, 14, (1915).- p. 347-400.- Collected papers, p. 78-128.

(10) *N. SLÄTER* "Gaps and Steps for the sequence $n\theta$ mod 1."- Proc. cam. Phil. Soc.-(1967).- 63, p.1115-1123.

(11) *TIJDEMAN & H.G. MEIJER* "On integers generated by a finite number of fixed primes."- Compositio Mathematica.- vol. 29, Fasc. 3 (1974).- p. 273-286.

G. BESSI
Département de Mathématiques
Université de LIMOGES
123, rue Albert Thomas
87100 - LIMOGES